

hormigón

***y ACERO***

*n.º 140*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.*

*COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.*

## Congreso sobre Legislación Ambiental

Se celebrará en Madrid entre los días 14 y 16 de octubre próximos, organizado por la Dirección General del Medio Ambiente del MOPU, con la colaboración de la Facultad de Derecho de la Universidad Complutense de Madrid.

El temario y los Ponentes del Congreso sobre Legislación Ambiental serán los siguientes:

- *El medio ambiente como objeto de regulación jurídica*, por don RAMON MARTIN MATEO, Catedrático de Derecho Administrativo de la Universidad de Vascongadas.
- *El medio ambiente en la Constitución Española*, por don TOMAS FERNANDEZ RODRIGUEZ, Catedrático de Derecho Administrativo y Rector de la Universidad a Distancia.
- *Competencias de las Comunidades Autónomas y otros entes territoriales relativos al medio ambiente*, por don EDUARDO GARCIA DE ENTERRIA, Catedrático de Derecho Administrativo de la Universidad Complutense de Madrid.
- *Ley general y/o leyes sectoriales para la protección del medio ambiente*, por don ALFONSO PEREZ MORENO, Profesor Agregado de Derecho Administrativo de la Universidad de Sevilla.
- *Instrumentos jurídicos preventivos y represivos en la protección del medio ambiente*, por don LUIS RODRIGUEZ RAMOS, Profesor Agregado de Derecho Penal y Secretario General del Instituto de Criminología.
- *El delito ecológico*, por don JOSE LUIS DEL VAL CID, Presidente del Comité del Medio Ambiente de la CEOE.
- *La legislación del medio ambiente en España y en la CEE*, por don LUIS MORELL OCAÑA, Catedrático de Derecho Administrativo de la Universidad de Extremadura.
- *El medio ambiente y la ordenación del territorio*, por don MARTIN BASSOLS COMA, Profesor Agregado de Derecho Administrativo de la Universidad Complutense de Madrid.

Asimismo, la Dirección General del Medio Ambiente, buscando dar un mayor realce al Congreso y con el afán de conseguir los mejores resultados positivos del mismo, admitirá de todas aquellas personas inscritas al Congreso la presentación de Comunicaciones libres, siempre que se ajusten a los temas oficiales de las Ponencias.

Para mayor información, escribir a la Secretaría del Congreso sobre Legislación Ambiental, Dirección General del Medio Ambiente del MOPU, Nuevos Ministerios, Madrid, o bien llamar por teléfono al número 410 33 80.



## **MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO**

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético.

- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA.**— Velázquez, 23. Madrid-1.  
**AGUSTI, S.A.**— Carretera de Barcelona, 36. Gerona.  
**ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. Madrid-20.  
**CAMARA' S.A.**— Paseo de San Vicente, 4. Valladolid.  
**CAMINOS Y PUERTOS, S.A.**— J. Lázaro Galdiano, 4. Madrid-16.  
**CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. Madrid-6.  
**CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE O.P. CENTRO BIBLIOGRAFICO.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.  
**CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.L.**— Aribau, 185. Barcelona-21.  
**DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 22. Madrid-2.  
**ELABORADOS METALICOS, S.A.**— Apartado 553, La Coruña.  
**ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.**— Biblioteca. Juan de Mena, 8. Madrid-14.  
**FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Balmes, 36. Barcelona-7.  
**FORJADOS DOMO.**— Hermosilla, 64. Madrid-1.  
**FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. Madrid-20.  
**HEREDIA Y MORENO, S.A.**— Princesa, 3. Madrid-8.  
**HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Archs, 10. Barcelona-2.  
**HIFORCEM.**— Apartado, 41. Sevilla.  
**HORMIGONES GERONA, S.A.**— Ronda San Antonio María Claret, 12. Gerona.  
**INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. Vitoria.  
**INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**— Ministerio de O.P. y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Madrid-3.  
**INTECSA.**— Orense, 70. Madrid-20.  
**INTEMAC.**— Monte Esquinza, 30. Madrid-4.  
**JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA.**— General Mola, 103, 10º. Madrid-6.  
**LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.  
**MEDITERRANEA DE PREFABRICADOS, S.A.**— Apartado, 34. BENICARLO (Castellón).  
**NEXOR, S.A.**— Dato, 18 - 1º. Vitoria.  
**NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. LOS CORRALES DE BUELNA (Santander).  
**PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. Madrid-1.  
**PRELOAD SISTEMAS, S.A.**— Avenida del Generalísimo, 30. Madrid-16.  
**PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. SAN MARTIN DE CENTELLAS (Barcelona).  
**PROCEDIMIENTOS BARREDO.**— Raimundo Fernández Villaverde, 45. Madrid-3.  
**S.A.E. BBR.**— Polígono Industrial Barcelonés. Calle Carrero Blanco, s/n. ABRERA (Barcelona).  
**S.A. ECHEVARRIA.**— Apartado, 46. Bilbao-8.  
**TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. Madrid-6.  
**TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A.**— Monturiol, 5. SANTA MARIA DE BARBARA (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las empresas citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

# *hormigón y acero*

*n. 140*

3.<sup>er</sup> trimestre, 1981

## CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	2.000,— ptas.	40,— dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	5.000,— ptas.	100,— dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	10.000,— ptas.	200,— dólares

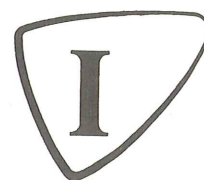
Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

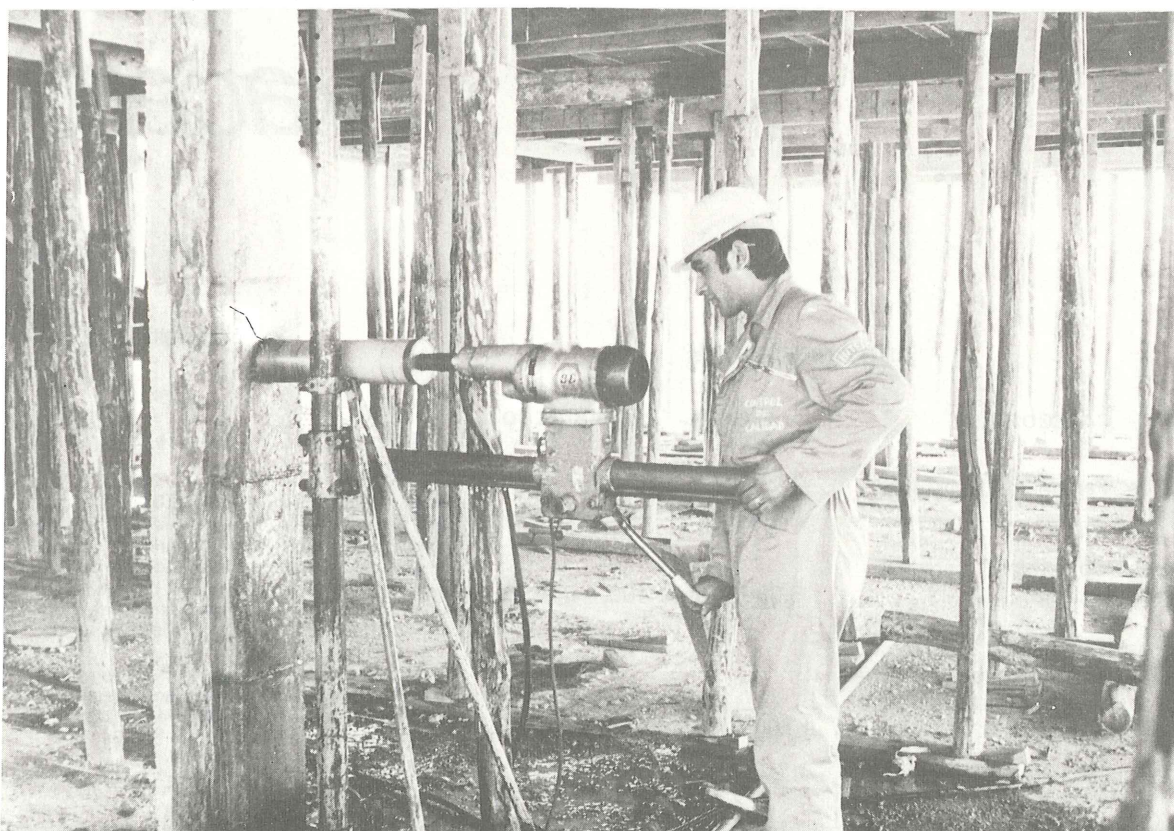
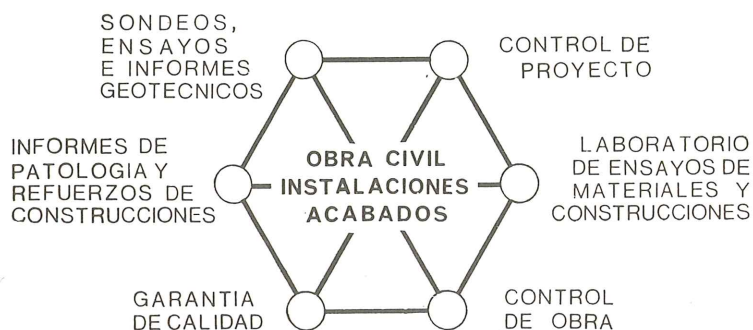
APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33



# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Extracción de probetas testigo de hormigón

### MADRID

#### Oficinas:

Monte Esquinza, 30 - 4.º D  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

#### Laboratorio

Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

### SANTANDER

Félix Apellániz, 11  
TORRELAVEGA  
Tel. (942) 89 02 01

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
AROCA, Ricardo  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ TROYANO, Leonardo  
FERNANDEZ VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Francisco Javier  
MONEO, Mariano  
MORENO TORRES, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente

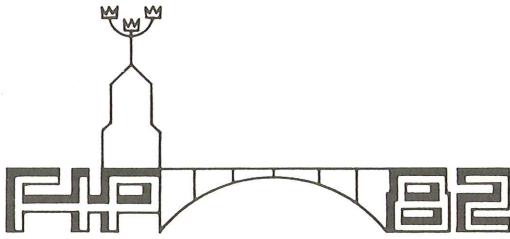
# hormigón y acero

**n. 140**

## índice

	Pág.
<b>591-6-9</b>	
<b>Recomendaciones de la Asociación Internacional de Estructuras Laminadas y Espaciales. Grupo de Trabajo Nº 5. . . . .</b>	<b>9</b>
Récommandations. Association Internationale des Voiles Minces et Structures Spatiaux. Groupe de Travail Nº 5. Recommendations. International Association for Shell and Spatial Structures. Working Group Nº 5. <i>Versión española por:</i> <i>Victor Jaria y Avelino Samartín.</i>	
<b>591-2-161</b>	
<b>Estudio sobre tableros de puentes. Parte III. El puente curvo. . . . .</b>	<b>77</b>
Etude sur les tabliers des ponts. 3ème Partie. Le pont courbe. Bridge deck study. Part III. The curved bridge. <i>F. J. Manterola Armisen.</i>	
<b>591-1-34</b>	
<b>Cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, referida a grados de libertad seleccionados . . . . .</b>	<b>123</b>
Calcul de la matrice de rigidité d'une structure, en relation avec des degrés de liberté sélectionnés. Computation of the stiffness matrix for a structure, related to selected degrees of freedom. <i>A. Recuero.</i>	





# Noveno Congreso Internacional de la FIP

ESTOCOLMO 6 – 10 Junio 1982

## EXTRACTO DEL PROGRAMA DE ACTOS

### Domingo 6 de junio

Solemne ceremonia inaugural por su Alteza  
Real el Príncipe Bertil.  
Discursos.

Programa musical.  
Imposición de medallas Freyssinet y de la  
F.I.P.  
Conferencias magistrales.  
Recepción de bienvenida.

### Sesiones de Trabajo

#### Lunes 7 de junio

- Seminario sobre proyecto y construcción de puentes.
- Estructuras marítimas de hormigón.
- Depósitos y vasijas de presión.
- Estructuras sísmicas.
- Reunión de la Comisión de Depósitos y Vasijas de Presión.
- Reunión de la Comisión de Práctica Constructiva.
- Contribuciones técnicas.

#### Martes 8 de junio

- Seminario sobre proyecto y construcción de edificios.
- Aceros de pretensado y sistemas.
- Práctica constructiva.
- Resistencia al fuego.
- Reunión de la Comisión de Estructuras Marítimas.
- Reunión de la Comisión de Estructuras Sísmicas.
- Contribuciones técnicas.

#### Miércoles 9 de junio

- Seminario sobre diseño y construcción de estructuras varias.
- Hormigones ligeros.
- Prefabricación.
- Reunión del Grupo de Trabajo de Recomendaciones de la F.I.P. sobre diseño práctico.
- Reunión de la Comisión de Hormigones ligeros.

- Reunión de la Comisión de Aceros de Pretensado.
- Reunión de la Comisión de Resistencia al Fuego.
- Contribuciones Técnicas.

#### Jueves 10 de junio

- Seminario sobre investigación.
- Reunión de la Comisión de Prefabricación.
- Contribuciones técnicas.
- Informes Generales sobre Contribuciones Técnicas.
- Ceremonia de Clausura.

Además de las Sesiones Técnicas, se han preparado otras actividades tales como:

- La exposición Técnica “CONCRETE 82”
- Proyección de películas técnicas.
- Excursiones técnicas y viajes Post-Congreso.
- Programa especial para acompañantes.

El programa definitivo del Congreso será distribuido por el Comité Organizador Sueco en noviembre de 1981.

Los organismos y particulares interesados dispondrán de una información más amplia dirigiéndose a:

SVENSKA BETONGFORENINGEN  
Fack  
S-100 44 STOCKHOLM.

**RELACION DE EMPRESAS QUE EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO,  
FIGURAN INSCRITAS EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO,  
COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"**

**ESPAÑA**

AGROMAN, S.A.— Madrid.  
ALBISA, S.A.— Algeciras (Cádiz).  
ARIDOS LIGEROS, S.A.— Madrid.  
AUTOPISTAS DEL ATLANTICO-CESA.— La Coruña.  
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.— Barcelona.  
AUXINI, S.A.— Madrid.  
AZMA, S.A.— Madrid.  
BIGUETES, S.L.— Elche (Alicante).  
BUTSEMS, S.A.— Madrid.  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.— Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.— Mislata (Valencia).  
CASTRO MATELO, V., S.A.— Sigueiro (La Coruña).  
CATEDRA DE CONSTRUCCION II DE LA ESCUELA TECNICA DE INGENIEROS  
AGRONOMOS.— Córdoba.  
CEMENTOS MOLINS, S.A.— Sant Vicenc dels Horts (Barcelona).  
CENTRO DE ESTUDIOS CEAC.— Barcelona.  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.— Madrid.  
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS.— Madrid.  
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— Gerona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. SECCION BIBLIOTECA.— Za-  
ragoza.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. DEPARTAMENTO LABORA-  
TORIOS. Sta. Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CATALUÑA.— Barcelona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. BIBLIOTECA.— Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.— Bilbao.  
COLEGIO OFICIAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Málaga.  
CONSTRUCCIONES BIGAR, S.L.— Aranda de Duego (Burgos).  
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.— Madrid.  
CONSTRUCCIONES LLABRES FELIU, S.A.— Palma de Mallorca (Baleares).  
CONTROLEX.— Alicante.  
COTESA, COLOCACIONES TECNICAS, S.A.— Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.— Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.— Madrid.  
CUMBRE MODULAR, S.A.— Barcelona.  
DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGIS-  
TICO DEL EJERCITO. MINISTERIO DEL EJERCITO.— Madrid.  
DITECO, S.L.— Valencia.  
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A.— Burgos.



ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS (EEPSA).— Manresa (Barcelona).  
 EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA (AUXINI).— Madrid.  
 ENAGA, S.A.— Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
 ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.— Zumárraga (Guipúzcoa).  
 ESTUDIO PREST.— Barcelona.  
 ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.— Madrid.  
 E.T.S. DE ARQUITECTURA.— Barcelona;  
 E.T.S. DE ARQUITECTURA.— Sevilla.  
 EUROESTUDIOS, S.A.— Madrid.  
 FEDERACION NACIONAL DE ENTIDADES EMPRESARIALES DE DERIVADOS DEL  
 CEMENTO (ANDECE).— Madrid.  
 FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.— Madrid.  
 FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
 FORJAS Y ALAMBRES DEL CADAGUA.— Erandio (Bilbao).  
 GIJON E HIJOS, S.A.— Motril (Granada).  
 GOMHERSA.— Talavera de la Reina (Toledo).  
 HERRING LEVANTE, S.A.— Valencia.  
 HIDAQUE, S.A.— Granada.  
 HORMIGONES GERONA, S.A.— Gerona.  
 HORMYCER, S.L.— Madrid.  
 HORSIA, S.A.— Viladecans (Barcelona).  
 HUARTE Y CIA, S.A.— Madrid.  
 IBERDUERO, S.A.— Bilbao.  
 IBERDUERO, S.A. (CENTRO DE DOCUMENTACION).— Bilbao.  
 IBERTECNICA, S.A.— Madrid.  
 IDASA, INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A.— La Coruña.  
 INBADELCA, S.A.— Baracaldo (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS VEYGA, S.A.— Tarrasa (Barcelona).  
 INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYSA).— Madrid.  
 INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.— Barcelona.  
 INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO Y PROMOCION SOCIAL. SECCION ASUNTOS  
 GENERALES (SEAF-PPO).— Madrid.  
 INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO.— Madrid.  
 JEFATURA PROVINCIAL DE CARRETERAS.— Valencia.  
 3ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS. SERVICIO DE CONSTRUCCION.— Bilbao.  
 5ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS.— Barcelona.  
 JULIAN ARUMI, S.L.— Vich (Barcelona).  
 JUNTA DEL PUERTO DE ALMERIA.— Almería.  
 LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.— Sta. Cruz de Tenerife.  
 LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.— Madrid.  
 LABORATORIO GEOCISA. BIBLIOTECA.— Coslada (Madrid).  
 LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.— Madrid.  
 LAING IBERICA, S.A.— Madrid.  
 LIBRERIA RUBIÑOS.— Madrid.  
 LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).— Castellón de la Plana.  
 MAHEMA, S.A.— Granollers (Barcelona).  
 MATERIALES Y TUBOS BONNA, S.A.— Madrid.  
 MATUBO, S.A.— Madrid.  
 MECANOGUMBA, S.A.— Mollet del Vallés (Barcelona).  
 NUEVA CERAMICA CAMPO.— Lendo-Laracha (La Coruña).  
 OTEP INTERNACIONAL, S.A.— Madrid.

POSTELECTRICA, S.A.— Palencia.  
 POSTENSA, S.A.— Bilbao.  
 PRAINSA.— Zaragoza.  
 PREBETONG CANARIA, S.A.— Sta. Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).— Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).— León.  
 PREFABRICADOS DEL HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).— Valladolid.  
 PREFABRICADOS NAVARROS, S.A.— Olazagutia (Navarra).  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.— Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PRETENSADOS AEDIUM, S.L.— Mutilva Baja (Navarra).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. HORTE.— Valladolid.  
 PROFESA.— Barcelona.  
 PROTEC, S.L.— Gijón (Oviedo).  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A.— Pinto (Madrid).  
 RENFE (Madrid).  
 RUBIERA, CENTRO TECNICO DE CALCULO, S.A. CETERSA.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA PREFLEX, S.A.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA R.L.M. "SOTECSA".— Gijón (Oviedo).  
 SAINCE.— Madrid.  
 S.E.A.T. (BIBLIOTECA).— Barcelona.  
 SENER, S.A.— Las Arenas (Vizcaya).  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.— Barcelona.  
 SIKA, S.A.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS.— Valencia.  
 SPANDECK CATALANA, S.A.— Barcelona.  
 SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. SECCION DE NORMATIVA (MOPU).—  
 Madrid.  
 SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA (MOPU).—  
 Madrid.  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".— Muriedas de Camargo (Santander).  
 TEPSA.— Tarrasa (Barcelona).  
 TOSAM, S.L.— Segovia.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).— Madrid.  
 TUBOS BORONDO.— Madrid.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— Madrid.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— San Juan de Aznalfarache (Sevilla).  
 VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.— San Sebastián.  
 VIGAS REMARRO.— Motril (Granada).  
 VIGUETAS ASTURIAS, S.A.— Oviedo.

#### EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.—  
 Montevideo (Uruguay).  
 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.— Sao Paulo (Brasil).  
 BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
 Buenos Aires (Argentina).



BIBLIOTECA DE INGENIERIA. UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.— Lima (Perú).  
 BIBLIOTECA-UNIVERSIDAD CATOLICA.— Quito (Ecuador).  
 CEPIC, S.C.— Córdoba (Argentina).  
 CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.— Buenos Aires (Argentina).  
 CONSULBAIRES.— Buenos Aires (Argentina).  
 COPERCO.— Mendoza (Argentina).  
 FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA.— Rosario (Argentina).  
 FACULTAD DE INGENIERIA. BIBLIOTECA.— Caracas (Venezuela).  
 INSTITUTO NACIONAL DE TECNOLOGIA. CENTRO DE INVESTIGACION DOCUMENTARIA.— Buenos Aires (Argentina).  
 INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLOGICAS.— Sao Paulo (Brasil).  
 LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.— Luanda (Rep. P. de Angola).  
 LIBRERIA LA PRENSA CATOLICA.— Quito (Ecuador).  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS. DIRECCION DE VIALIDAD. DIVISION BIBLIOTECA Y PUBLICACIONES.— La Plata. Provincia de Buenos Aires (Argentina).  
 R.S.W. "PRASA-KSIAZKA-RUCH".— 00-958. Warszawa (Polonia).  
 SCIENCE REFERENCE LIBRARY.— Londres (Inglaterra).  
 SOCIEDAD HORMIGON ARMADO PRETENSADO (S.H.A.P., S.A.).— Pilar. Provincia de Buenos Aires (Argentina).  
 UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. FACULTAD DE INGENIERIA.— Mérida (Venezuela).  
 UNIVERSIDAD CATOLICA MADRE Y MAESTRA.— Santiago de los Caballeros (República Dominicana).  
 UNIVERSIDAD DE CHILE. DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIAS.— Valparaiso (Chile).  
 UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. BIBLIOTECA.— Mayaguez (Puerto Rico).

### AVISO IMPORTANTE

#### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

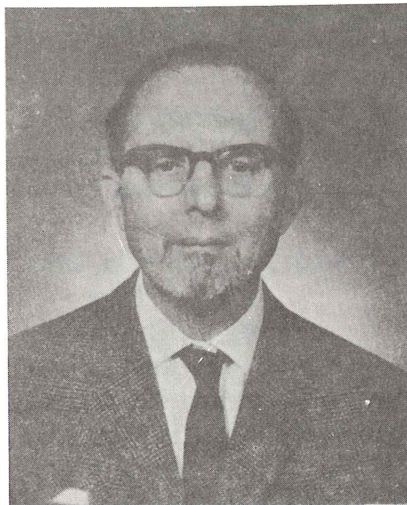
Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

# Recomendaciones de la Asociación Internacional de Estructuras Laminadas y Espaciales Grupo de Trabajo N° 5



*Ronald Stewart Jenkins 1907-1975*

Esta publicación está dedicada a la memoria de Ronald Stewart Jenkins, uno de los miembros fundadores de la IASS, miembro durante mucho tiempo de su Comité Ejecutivo y de su Cuadro Consejero, un ingeniero teórico y práctico "sans pareil", alguien a emular por los proyectistas de láminas de todo el mundo

Versión española traducida del inglés por: Víctor Jaria A.  
Bajo la supervisión de: Avelino Samartín O.  
Doctores Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Título de la obra original: Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates.  
de Stefan J. Medwadowski y otros, que ha sido editada por la IASS en Madrid 1979.

**RECOMMENDATIONS FOR REINFORCED CONCRETE SHELLS AND FOLDED PLATES**  
**(Recomendaciones para láminas de hormigón armado)**

Elaborado por  
El Grupo de Trabajo de Recomendaciones de  
La Asociación Internacional de Estructuras Laminares y Espaciales (IASS)

Stefan J. Medwadowski, Director  
Arend M. Haas  
Georgy K. Khaidukov  
Lajos Kollar  
Herbert Kupfer  
André Paduart, Miembro ex-oficio  
Egor P. Popov  
Florencio del Pozo  
Herrmann Rühle, Director 1969-1974  
Avelino Samartín Q.  
Alex C. Scordelis

con una presentación por parte de A. Paduart, Presidente de IASS

**Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates**  
**(Recomendaciones para láminas de hormigón armado)**

Medwadowski, Stefan J., y otros

Copyright 1979 by International Association for Shell and Spatial Structures, Madrid, Spain.

Reservados todos los derechos.

Esta publicación o cualquier parte de ella no podrá ser reproducida, ni transmitida o almacenada con un sistema recuperable por ninguna forma o medio electrónico, mecánico, de fotocopiado, magnético u otros, sin permiso escrito del editor.



## INDICE

PRESENTACION

PREFACIO

NOTACION

- Capítulo 1 INTRODUCCION
- 1.1 Consideraciones generales
  - 1.2 Definiciones
  - 1.3 Clasificación de las láminas
  - 1.4 Alcance de estas Recomendaciones
- Capítulo 2 RESISTENCIA Y CONDICIONES DE SERVICIO
- 2.1 Consideraciones generales
  - 2.2 Acciones
  - 2.3 Propiedades de los materiales
  - 2.4 Proyecto en cargas de servicio
  - 2.5 Proyecto en cargas de rotura
- Capítulo 3 CALCULO
- 3.1 Introducción
  - 3.2 Formulaciones analíticas y soluciones
  - 3.3 Métodos numéricos
  - 3.4 Comportamiento no lineal de las láminas
  - 3.5 Análisis de la estabilidad
  - 3.6 Análisis experimental
  - 3.7 Análisis de los elementos auxiliares
- Capítulo 4 DIMENSIONAMIENTO Y EXIGENCIAS DE PROYECTO
- 4.1 Consideraciones generales
  - 4.2 Hormigón de la lámina
  - 4.3 Armaduras de la lámina
  - 4.4 Armaduras de los elementos auxiliares
  - 4.5 Pretensado
  - 4.6 Inserciones soldadas
- Capítulo 5 CONSTRUCCION, DETALLES ARQUITECTONICOS. ECONOMIA
- 5.1 Consideraciones generales
  - 5.2 Construcción
  - 5.3 Detalles arquitectónicos
  - 5.4 Economía
- Capítulo 6 BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA SOBRE LAMINAS
- 6.1 Consideraciones generales
  - 6.2 Referencias citadas en el texto
  - 6.3 Bibliografía seleccionada de láminas.

## PREFACIO DEL PRESIDENTE DE LA IASS A LA EDICION ESPAÑOLA

Llega esta publicación de las "Recomendaciones para láminas de hormigón armado" en español cuando acabo de hacerme cargo de la Presidencia de la ASOCIACION INTERNACIONAL DE ESTRUCTURAS LAMINARES Y ESPACIALES, y parece lógico que se incluyan en ella unas frases escritas por mi mismo, como cuarto Presidente de la misma.

Estas Recomendaciones sobre láminas de hormigón armado representan la culminación del importante esfuerzo llevado a cabo, de forma conjunta, por un grupo de especialistas de todo el mundo, bajo el auspicio e impulso de la Asociación Internacional de las Estructuras Laminares y Espaciales (I.A.S.S.). Se publicaron por primera vez en inglés, con ocasión del Congreso de Madrid, durante el pasado mes de setiembre de 1979. Este Congreso sirvió de marco conmemorativo de la fundación de la Asociación, que ocurrió bajo la presidencia eminente de la personalidad excepcional del Profesor Eduardo Torroja, hizo entonces veinte años.

El propósito de estas Recomendaciones, como indica el Dr. Stefan Medwadowski en el prefacio a la publicación original inglesa, es que sean aplicables en todo el mundo, tal como corresponde al carácter verdaderamente internacional de la Asociación.

El objetivo es evidentemente ambicioso y de difícil consecución, debido a la existencia de numerosos factores locales, característicos y diferenciales, en los distintos países, tanto en lo que se refiere a los aspectos de construcción y proyecto como los inherentes a la peculiar economía en que debe desenvolverse la realización de las láminas de hormigón. No obstante, un esfuerzo en la dirección de conseguir una mayor difusión de estas Recomendaciones está representado por esta traducción española, que sigue la línea ya iniciada por la versión japonesa llevada a cabo recientemente por el Profesor Kawaguchi y que sale ahora a la luz, tras un lapso de tiempo relativamente corto desde aquella primera publicación inglesa.

Esta traducción española de las Recomendaciones se ha realizado con un gran cuidado y minuciosidad bajo la dirección del Profesor Avelino Samartín, uno de los miembros del grupo de trabajo que ha intervenido en la redacción de las mismas.

Esperamos que con esta publicación los especialistas de habla hispana dedicados a las estructuras laminares encuentren una importante ayuda en su trabajo y un nuevo y saludable impulso para continuar su camino, y que constituya, para los que lo inicien, un estímulo que les permita adentrarse en ese apasionante mundo de la concepción, proyecto, cálculo y construcción de las láminas.

Prof. Dr. Ing. R. López Palanco  
4º Presidente de la IASS

## RESUMEN EN INGLES - ENGLISH SUMMARY

The IASS Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates consist of five chapters of text containing a discussion of various aspects of design, analysis and construction of shell structures, and one chapter—the sixth— which contains a selected bibliography. The contents are summarized in the following.

**Chapter 1: Introduction**, contains a definition and a classification of shell structures; a number of surfaces which proved useful in practical applications or which appear promising are discussed in detail.



**Chapter 2: Strength and serviceability**, begins with a consideration of loads, and of materials which occur in shell construction. Next, two approaches to the analysis of shell behavior are discussed: the Working Load Design, and the Ultimate Load Design.

**Chapter 3: Analysis**, presents a brief summary of the current understanding of shell behavior, and of the corresponding shell theories with their advantages and limitations, and the analytical, numerical and experimental methods for obtaining solutions. The stability of shells including the geometric and material nonlinearities is discussed, and a practical approach to the calculation of buckling capacity is given. A brief discussion of the analysis of auxiliary members closes the chapter.

**Chapter 4: Proportioning and requirements for design**, is concerned with the practical side of shell design: the shell thickness, the amount, detailing and placing of reinforcement, and the reinforcement in the auxiliary members.

**Chapter 5: Construction - Architectural details - Economics**, contains a consideration of the three important factors mentioned in its heading. The topics discussed include formwork and scaffolding, placement of concrete, precasting, concrete finishes, watertightness, joint design, interfacing with mechanical and electrical services, and the effect that shell geometry, detailing and method of construction have on the economics of shell construction.

**Chapter 6: Selected bibliography of shells**, presents a listing of 178 items related to the design, analysis and construction of shell structures, divided into a number of categories, as follows. (1) References cited in the text - 27 titles, (2) Proceedings of IASS Simposia held in the period 1959 through 1978 - 30 titles, (3) Proceedings of related conferences in the period 1952 through 1972 - 10 titles, (4) General texts - 2 titles, (5) Conceptual design - 14 positions, (6) Analysis, detailing and construction - 37 positions, (7) Tabular and graphical aids to analysis - 29 positions, (8) Computer software - a listing of 14 programs by title, (9) Surveys and bibliographies - 9 positions, and (10) Shell codes, regulations and standards, which includes a listing of 6 publications.

## PRESENTACION

*Uno de los objetos de la IASS es la preparación de Recomendaciones sobre los diferentes aspectos del proyecto, análisis y construcción de láminas delgadas y estructuras espaciales. Esta importante fase del trabajo de la Asociación se realiza a través de las actividades de los Grupos de Trabajo.*

*A causa de su relevancia histórica, tanto en el desarrollo de los sistemas espaciales como en la organización y crecimiento de la IASS, se ha dedicado un considerable esfuerzo a lo largo de varios años al problema de las láminas delgadas. Esfuerzo que culmina ahora con la publicación de estas Recomendaciones.*

*El trabajo comenzó en 1969 con la creación por el entonces presidente de la IASS, Profesor Haas, del Grupo de Trabajo de la IASS sobre Recomendaciones bajo la dirección del Dr. Rühle. Se mantuvieron varias reuniones y se desarrolló un esquema de Recomendaciones, completando así la primera fase de la tarea.*

*En 1974, por consejo del Dr. Rühle nombré al Dr. Medwadowski nuevo director, y el Grupo de Trabajo aumentó con la llegada de varios especialistas. En Udine, Italia, tuvo lugar una concurrida reunión, donde fueron discutidos en profundidad varias lecturas, finalizando con la asignación de tareas a todos los miembros. A continuación de la reunión de Udine,*



*se escribió, comentó, editó y reeditó el borrador de varios capítulos de las Recomendaciones. El texto completo se presentó al Comité Ejecutivo de la IASS que, en su reunión de Montreal en 1976, lo aprobó para su publicación.*

*Constituye para mí un deber muy agradable expresar mi más sincero agradecimiento a todos los componentes del Grupo de Trabajo, que laboró intensamente en la preparación y edición de los borradores sucesivos, con la asistencia a las reuniones, y la participación en muchas y largas discusiones. Mi agradecimiento especial se dirige al director del Grupo de Trabajo, Dr. Medwadowski, que a través de un incesante y arduo trabajo, casi como un mago, consiguió producir el texto final de las Recomendaciones en un lapso de tiempo sorprendentemente breve.*

*Confío que estas Recomendaciones serán útiles a todos aquellos que en todo el mundo trabajan en el campo del proyecto, análisis y construcción de las láminas delgadas de hormigón.*

**Prof. Dr. Ir. A. Paduart**  
Presidente de la IASS

## **PREFACIO**

*El desarrollo de Recomendaciones para el proyecto, cálculo y construcción de láminas de hormigón constituye una difícil y larga tarea, aumentada, si cabe, por el carácter internacional de la entidad organizadora. La IASS —Asociación Internacional de Estructuras Espaciales y Laminares— está formada por miembros individuales e institucionales de unos setenta y cinco países; siendo, por lo tanto, deseable que una publicación como la de estas Recomendaciones sea aplicable en todo el mundo, a pesar de que las circunstancias bajo las que se proyectan y construyen las láminas varían no sólo de continente en continente, sino también, de país a país. El medio físico y el clima, el grado de desarrollo tecnológico de la construcción, la disponibilidad de materiales y de mano de obra especializada, el costo de construcción, incluso la sofisticación de los métodos analíticos accesibles al proyectista son elementos que varían notablemente de un lugar a otro; por ello se decidió mantener el carácter general de estas recomendaciones, y remitir al usuario a la literatura especializada para problemas concretos. En tales casos pueden ser de utilidad las Actas de los Congresos de la IASS, donde se analizan temas específicos.*

*El esfuerzo que engloba el desarrollo de estas Recomendaciones incluye la contribución de muchas personas durante varios años. Las aportaciones personales o de instituciones que han suministrado información acerca de la normativa existente en sus respectivos países es incommensurable. Me complace enormemente aprovechar esta ocasión para expresar mi agradecimiento por su contribución a todos los miembros del Grupo de Trabajo que se han afanado en la larga y dura tarea de hacer realidad estas Recomendaciones; en particular al Dr. Rühle, primer director del Grupo de Trabajo y al Prof. Scordelis, que mucho ha contribuido al desarrollo y lenguaje del texto. Y sobre todo, debe agradecerse el constante apoyo y entusiasmo del Prof. Paduart, presidente de la IASS, que tomó un activo y personal interés en la labor del Grupo de Trabajo.*

**Dr. Stefan J. Medwadowski**  
Director Grupo de Trabajo de Recomendaciones de la IASS.

## NOTACION

C	Coficiente proporcional a la rigidez extensional de la ecuación (3.1)
D	Carga permanente
E	Carga sísmica
$E_c$	Módulo de elasticidad del hormigón
$E_{ci}$	Módulo de elasticidad del hormigón reducido por la fluencia
F.S.	Coficiente de seguridad
H	Humedad relativa
K	Rigidez a flexión de la lámina
L	Sobrecarga de uso
R	Radio mínimo de curvatura de la lámina (Tabla 3.1)
U	Carga total
W	Carga de viento
$C_u$	Coficiente de la ecuación (3.7)
f	Magnitud laminar de la ecuación (3.6)
$f_c$	Resistencia del hormigón en el instante de aplicación de la carga en la ecuación (3.7)
$f_y$	Tensión de relajación del acero
$f'_c$	Resistencia del hormigón a los 28 días en probeta cilíndrica
h	Espesor de la lámina
p	Carga en la lámina
$p_{cr}^{lin}$	Carga crítica lineal
$p_{cr}^u$	Carga "Supercrítica"
$p_{cr}^{u, reinf}$	Carga "Supercrítica" reducida
$p_{cr}^{plast}$	Carga crítica plástica
$P_{plast}$	Carga plástica, sin considerar el pandeo
r	Factor de reducción en la ecuación (4.3)
w	Desplazamiento normal
$w'_o$	Desplazamiento normal calculado o medido (anterior al pandeo)
$w''_o$	Amplitud de la desviación de forma
$\bar{w}$	Peso del hormigón en la ecuación (2.1)
$\Phi$	Función de tensiones de Airy
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Coordenadas laminares en las ecuaciones (3.3) y (3.6)
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Parámetros laminares en las ecuaciones (3.3) y (3.6)
$\epsilon_b$	Deformación unitaria en la fibra extrema por flexión
$\epsilon_m$	Deformación unitaria en la superficie media por axil
$\epsilon_{sh}$	Deformación unitaria por retracción libre del hormigón endurecido
$\kappa$	Cociente de las tensiones principales
$\lambda$	"Longitud de onda" del prototipo de deformación laminar
$\mu$	Coficiente en la figura 3.3
$\nu$	Coficiente de Poisson
$\sigma$	Tensión
$\phi$	Angulo entre las tensiones principales y las armaduras
$\psi$	Coficiente en las figuras 3.3 y 3.4
$\Delta_k$	Operador diferencial de segundo orden que aparece por primera vez en la ecuación (3.1)



# CAPITULO 1: INTRODUCCION

## 1.1. Consideraciones generales

Desde la antigüedad, cuando las formas de la arquitectura romana se extendieron al espacio tridimensional, el hombre ha utilizado estructuras de tipo laminar. Sin embargo, el uso racional de láminas delgadas de hormigón es relativamente reciente situándose sus inicios en las primeras décadas del siglo veinte. Desde aquellos comienzos, el uso de las láminas como cubiertas y como otros elementos de edificación ha aumentado tan rápidamente que, al filo de los tres cuartos de este siglo, se están construyendo láminas delgadas de hormigón con gran frecuencia en todos los continentes.

Con el creciente uso de las láminas, ha aumentado el conocimiento de su comportamiento. Observaciones en obra, ensayos de laboratorio, desarrollo de teorías de cálculo y, en la última década, el desarrollo de soluciones por medio de ordenadores digitales han contribuido al progreso de realizaciones importantes. Sin embargo, debido al amplio rango de posibilidades geométricas, el entendimiento de las estructuras laminares delgadas es aún limitado. Para algunos sistemas de láminas delgadas, como las láminas cilíndricas o las cúpulas esféricas, la experiencia acumulada permite su proyecto con el mismo grado de exactitud que en construcciones convencionales de hormigón armado. Para otras estructuras laminares, la experiencia es menor y existe una mayor dificultad para llevar a cabo un cálculo suficientemente exacto, que incluya todos los efectos importantes, por lo que la realización de un proyecto satisfactorio y seguro de las mismas requiere unos criterios y conocimientos estructurales profundos.

El objetivo de las presentes Recomendaciones es ayudar en el desarrollo de dichos criterios y conocimientos en las personas encargadas de diseñar, calcular y construir láminas delgadas, al mismo tiempo de facilitar su labor a través de:

- Resaltar los problemas comunes de las estructuras laminares de hormigón, y analizar las soluciones generalmente aceptadas a tales problemas.
- Identificar aquellos problemas de diseño, cálculo y construcción que, quizás, aún no están totalmente entendidos y para los cuales no existen soluciones universalmente admitidas.
- Dar una bibliografía seleccionada de láminas.

A la vista de la limitación de intenciones de estas Recomendaciones, y, del hecho de que el diseño, cálculo y construcción de láminas delgadas de hormigón requiere un conocimiento exhaustivo del tema es evidente que las recomendaciones aquí expuestas no son suficientes para la satisfactoria ejecución de estructuras laminares. Para mayor información, los proyectistas deben acudir a especialistas de la materia, a la bibliografía citada y a los otros muchos textos existentes.

## 1.2. Definiciones

### 1.2.1. Láminas

*Lámina delgada:* Sistema estructural que tiene la forma de una superficie o combinación de ellas en el espacio tridimensional. El espesor de una lámina es pequeño comparado con sus otras dimensiones. Estas características geométricas dotan a las láminas de capacidad de carga tridimensional, que es transmitida fundamentalmente por tensiones en su plano determinadas por la geometría de la lámina, por su forma de apoyo y la naturaleza de la propia carga.



*Membrana:* Lámina delgada que soporta la carga únicamente mediante esfuerzos en su plano y es incapaz de transmitir esfuerzos de flexión.

*Lámina de tracción:* Membrana capaz de transmitir únicamente esfuerzos de tracción.

*Lámina entramado:* Lámina delgada formada por el ensamblaje de elementos mono o bidimensionales unidos en puntos nodales que, en conjunto, definen una superficie espacial. A diferencia de otras láminas delgadas más usuales, una lámina esqueleto no debe ser necesariamente algo que cierra un espacio.

*Lámina plegada:* Un tipo especial de sistema estructural de láminas delgadas formado por combinación de elementos planos unidos a lo largo de los bordes. Esta estructura define una combinación de superficies en el espacio. Debido a que los elementos son planos los esfuerzos flectores pueden ser importantes.

### 1.2.2. Elementos auxiliares

Un elemento auxiliar es cualquier elemento estructural situado a lo largo del contorno de una lámina o trozo de lámina con capacidad para rigidizarla y distribuir o transmitir las cargas conjuntamente con la lámina. Normalmente, un elemento auxiliar puede desempeñar distintas misiones. De acuerdo con el uso, se pueden distinguir los siguientes tipos de elementos auxiliares.

*Elementos de apoyo:* Vigas, arcos, marcos, diafragmas, etc., situados en los bordes de las láminas delgadas, los cuales tienen la doble misión de apoyar y rigidizar a éstas.

*Elementos de borde:* Vigas, marcos, etc., dispuestos en los bordes de las láminas delgadas que no formando parte del apoyo principal de la estructura rigidizan la lámina y actúan solidariamente con ella en la transmisión de la carga a los soportes.

*Elementos rigidizadores:* Nervios con misión de rigidizar la lámina delgada y controlar las deformaciones locales. La participación de los elementos rigidizadores en la transmisión de cargas a los elementos de apoyo es pequeña.

### 1.2.3. Definiciones geométricas

Algunos de los vocablos geométricos más comunes empleados en el proyecto de láminas se definen como sigue:

*Superficie media:* Superficie que define la forma de una lámina de espesor teórico nulo. Normalmente, pero no siempre, la superficie media se supone equidistante de las dos "caras" de la lámina. Si, como es el caso usual la superficie media, se define analíticamente, se dice que tiene "forma geométrica"; en caso contrario, se denomina superficie de "forma libre".

*Curvatura y radio de curvatura:* En cualquier punto de la superficie, es posible definir planos que contengan a la normal a aquélla. Estos "planos normales" cortan a la superficie a lo largo de unas curvas. El radio de curvatura de cada una de dichas curvas en el punto de intersección con la normal es un radio de curvatura de la superficie en dicho punto, y, la correspondiente curvatura es la curvatura de la superficie según esa línea. Dado que el valor del radio de curvatura puede variar con la orientación del plano normal, se pueden hallar los valores máximo y mínimo del radio (llamados "radios principales de curvatura"), su orientación, y las "curvaturas principales" asociadas.

*Curvatura Gaussiana:* Producto de las curvaturas principales en un punto cualquiera de la superficie. Tal producto puede ser positivo, nulo o negativo; el “Índice de curvatura Gaussiana” toma el valor +1, 0 y -1, respectivamente y la superficie, a su vez, se denomina en dicho punto sinclástica o “elíptica”, superficie de curvatura nula o “parabólica” y anticlástica o “hiperbólica”. El valor del índice de curvatura gaussiano tiene una fuerte influencia en el comportamiento de la lámina, por ejemplo, en la manera de transmitir las cargas.

*Curvatura media:* Media aritmética de las curvaturas principales en dicho punto.

*Generatriz:* Curva plana que define la superficie al moverse de una forma preestablecida en el espacio.

*Directriz:* Curva plana, que junto a otros criterios, sirve para definir el movimiento de la generatriz.

*Superficie desarrollable:* Cualquier superficie de curvatura gaussiana nula. Tales superficies se pueden desdoblar sobre un plano sin arrugarse.

*Superficie reglada:* Superficie tal que por cualquiera de sus puntos pasa una línea recta totalmente contenida en ella. Si solamente se puede trazar una de tales líneas la superficie se define simplemente reglada; si por todos sus puntos se pueden trazar dos de dichas rectas la superficie se llama doblemente reglada.

*Superficie mínima:* Superficie con curvatura media nula en todos los puntos. Las superficies mínimas poseen la propiedad de tener la menor área superficial para cualquier contorno cerrado dado.

### 1.3. Clasificación de las láminas

Las láminas se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios; por ejemplo, el sistema de clasificación puede basarse en el modo de construcción de la lámina: hormigonado “in situ”, o prefabricado. Otro método de clasificación puede ser la forma de trabajo de la lámina: membrana, lámina de tracción, o lámina capaz de transmitir esfuerzos flectores. Sin embargo, la división más significativa se basa en la geometría de la superficie laminar. La razón de ello es la influencia decisiva de la geometría superficial en aspectos esenciales del comportamiento de la lámina: la manera en que se transmiten las cargas, la facilidad y economía constructiva y, finalmente, las cualidades estéticas del conjunto estructural.

En lo que sigue, las láminas delgadas se clasifican según las superficies que las definen; en especial, de acuerdo con la forma y tipo de movimiento de la generatriz.

#### 1.3.1. Láminas de revolución

Son las definidas por el giro de la generatriz alrededor de un eje situado en su propio plano. A continuación, se muestran las superficies de revolución más comunes.

*Cono:* La generatriz es una línea recta que corta al eje de revolución. La superficie es simplemente reglada con curvatura gaussiana nula; y por lo tanto, desarrollable. Se utiliza principalmente para depósitos, también, para cubiertas de tipo cúpula, y para cubrir trapecios planos.

*Cilindro circular:* La generatriz es una línea recta paralela al eje de revolución. La superficie es simplemente reglada con curvatura gaussiana nula; y por lo tanto, la superficie es desarrollable. Este tipo de lámina ha encontrado una gran aplicación en la construcción



de edificios, siendo quizás los segmentos de cilindros circulares, solos o combinados, el tipo de lámina delgada más utilizada.

*Esfera:* La generatriz es un círculo con el centro en el eje de revolución. La curvatura gaussiana es positiva y constante. En construcción de edificios, se usa normalmente como cubierta esférica denominada "cúpula esférica". Es una de las formas más antiguas de lámina delgada, remontándose sus orígenes al tiempo de los romanos.

Los segmentos esféricos se utilizan con frecuencia para cubrir áreas de planta poligonal.

*Cúpula:* La generatriz es una curva plana cualquiera que corta al eje de revolución. La superficie es no reglada normalmente y el signo de la curvatura gaussiana depende de la forma de la generatriz. Normalmente las generatrices son parábolas o elipses, dando lugar a "paraboloides o elipsoides de revolución", respectivamente, en cuyo caso la curvatura gaussiana es positiva.

*Hiperboloide de revolución de una hoja:* La generatriz es una hipérbola con el eje imaginario paralelo al eje de revolución. La superficie es doblemente reglada no desarrollable con curvatura gaussiana negativa. Este tipo de lámina se utiliza normalmente en la construcción de torres de refrigeración, pero ocasionalmente se usa para dar forma a toda la edificación.

*Hiperboloide de revolución de dos hojas:* La generatriz es una hipérbola que gira alrededor de su eje real. La curvatura gaussiana es positiva y la superficie es no desarrollable. Una hoja de esta superficie se puede utilizar como cubierta tipo cúpula.

*Toros y toroides:* La generatriz es una cónica con eje de simetría distinto al eje de revolución. En el caso particular de que la generatriz sea una circunferencia la superficie se denomina toro. El toro es una superficie cerrada, en contraste con la superficie abierta del toroide, que resulta de la rotación de la generatriz en forma de, por ejemplo, una parábola. Este tipo de superficie es de doble curvatura, y, la curvatura gaussiana depende de la forma de la generatriz y la situación del punto en la superficie. Como ejemplo, en el caso de un toro la curvatura gaussiana varía de positiva a negativa pasando por cero a medida que nos acercamos al eje de revolución. Segmentos de toro combinados se han utilizado para formar cubiertas de estructuras.

### 1.3.2. Superficies catalanas

Son las definidas por la trayectoria de una generatriz recta en el espacio de modo que la generatriz permanece siempre paralela a un plano dado y en contacto con dos directrices. Las directrices son curvas planas situadas en planos paralelos que a su vez son perpendiculares al plano director. Las superficies catalanas por lo tanto están indicadas para cubrir zonas rectangulares planas. Algunos de los tipos más comunes son los siguientes:

*Paraboloide hiperbólico:* Las directrices son líneas rectas no paralelas. La superficie es doblemente reglada de curvatura gaussiana negativa y, por lo tanto, no desarrollable. Este tipo de superficie ha encontrado un amplio campo de aplicación en construcción de edificios. También podría ser considerada como una superficie traslacional.

*Conoide:* Una de las directrices es una recta. En función de la forma de la segunda directriz, el conoide puede ser "circular", "parabólico", "elíptico", etc. En el caso particular de que la generatriz sea tangente a una esfera especificada, el conoide se denomina "esférico".



Esta superficie reglada de doble curvatura es un típico caso de curvatura gaussiana negativa, por lo tanto, no desarrollable. Los conoides son ampliamente utilizados en construcción, en particular, combinados en cubiertas-claraboyas.

*Cilindroide:* Ambas directrices son curvas. La superficie es simplemente reglada, y el signo de la curvatura gaussiana depende de la forma y situación de las directrices. La superficie es no desarrollable.

### 1.3.3. Superficies traslacionales

Son las definidas por el movimiento de la generatriz a lo largo de una directriz, siendo dicho movimiento paralelo a un plano director. Esta superficie se usa para cubrir plantas rectangulares. A continuación se describen algunas de las más comunes, entre las muchas posibles, superficies traslacionales.

*Superficies cilíndricas:* La generatriz es una curva plana y la directriz una línea recta. La superficie es simplemente reglada con curvatura gaussiana nula y, por lo tanto, desarrollable. En el caso particular en el que la generatriz sea un segmento de circunferencia, o una combinación de los segmentos, la superficie forma una bóveda cilíndrica circular; quizás, la más usual de todas las láminas delgadas utilizadas como cubiertas.

*Paraboloide elíptico:* Tanto la generatriz como la directriz son parábolas con curvaturas del mismo signo (“abiertas” en el mismo sentido). La superficie de doble curvatura, con curvatura gaussiana positiva, es no desarrollable. Normalmente se utiliza este tipo de lámina para construcción de cubiertas.

*Paraboloide hiperbólico:* Como en el caso anterior, la generatriz y la directriz son parábolas, pero con curvaturas de signo distinto (“abiertas” en sentidos contrarios). La superficie de doble curvatura y curvatura gaussiana negativa es no desarrollable. Esta superficie puede clasificarse también como superficie catalana.

### 1.3.4. Superficies helicoidales

En este caso el movimiento de la generatriz se define por medio de dos directrices: una hélice y una línea recta, que a su vez es el eje de la hélice y el del helicoide. La generatriz puede ser una línea recta (superficie reglada) o una curva plana. Si la generatriz corta al eje, el helicoide se denomina “cerrado” y “abierto” en caso contrario. Las superficies helicoidales se subclasifican en función del tipo de hélice directriz, siendo la más común el “cilindro helicoidal”. Otros tipos de superficies helicoidales son el “helicoide conoidal”, el “helicoide parabólico”, etc.

En el caso particular del helicoide cilíndrico, reglado y abierto con generatrices tangentes al cilindro director, la superficie tiene curvatura gaussiana nula y, por lo tanto, es desarrollable.

*Helicoide común:* La generatriz es una línea recta que corta al eje en ángulo recto y la hélice directriz es cilíndrica. Tal superficie es reglada, cerrada y de doble curvatura, con curvatura gaussiana negativa. El helicoide común tiene la propiedad de ser una superficie mínima, es decir, su curvatura media es nula en cualquier punto.

### 1.3.5. Superficies traslacionales generalizadas

Las superficies traslacionales se definieron en el párrafo 1.3.3. como aquellas superficies formadas por el movimiento paralelo de la generatriz a lo largo de una directriz perpendicular al plano de la generatriz. Este movimiento se puede generalizar por dos caminos. El movimiento ya no debe ser paralelo al ángulo que forman la generatriz y el plano origen varía de acuerdo con una ley dada. Además, la forma de la generatriz puede, asimismo, variar de acuerdo con una ley dada en función de su posición en el espacio. En este caso, las leyes de variación de la forma de la generatriz y del movimiento se definen en función del problema a resolver. Tales superficies se denominan superficies traslacionales generalizadas.

*Superficies parabólicas:* La generatriz es una parábola con base de ancho constante y altura variable y la ley de variación de alturas es tal que las directrices son también parábolas, manteniéndose el movimiento paralelo. El resultado es una superficie de doble curvatura, no reglada y no desarrollable, que cubre una planta rectangular.

*Superficies elípticas:* La generatriz es una elipse con base de ancho constante y altura variable. La ley de variación de la altura es tal que las directrices son también elipses, convirtiéndose el movimiento paralelo. La superficie de doble curvatura, no reglada y no desarrollable, cubre un rectángulo plano.

*Superficies sinusoidales:* La generatriz y la directriz son segmentos de la curva de senos, por lo tanto, la superficie cubre un rectángulo plano, pues se mantiene el movimiento paralelo. La superficie es de doble curvatura, no reglada y no desarrollable.

En los tres casos anteriormente mencionados, el signo de la curvatura gaussiana puede variar en función de la situación del punto en la superficie.

### 1.3.6. Superficies afines

Cualquier superficie geométrica puede ser transformada en otra superficie a través de una transformación afín en el espacio, de tal modo que exista una correspondencia "uno a uno" entre los puntos de ambas superficies.

Una transformación afín convierte a los puntos, líneas y planos en puntos, líneas y planos, respectivamente y conserva la propiedad de paralelismo de líneas y planos. No obstante, la longitud de la métrica  $ds$  así como los ángulos, en general, no se conservan. Por ejemplo, un cono circular se puede transformar en un cono elíptico y un conoide circular se puede convertir en un conoide elíptico. Por ello, la técnica de transformaciones afines se puede utilizar para ajustar la geometría de una lámina a unas condiciones dadas.

### 1.3.7. Superficies compuestas

Se pueden combinar partes de superficies para crear una nueva forma laminar. La nueva superficie compuesta, normalmente no mantiene las propiedades de continuidad de las partes, pudiéndose, prácticamente, confeccionar un número virtualmente ilimitado de formas nuevas, siendo esta variedad la base de la riqueza de soluciones arquitectónicas factibles con estructuras laminares. Se muestran a continuación algunos ejemplos:

- Intersección de dos cilindros circulares de igual radio y de ejes perpendiculares. Este tipo de superficie compuesta ha sido empleado desde antiguo, y, en función de las partes de cilindros consideradas, se conoce como bóveda de crucería o cúpula cilín-



drica. Se pueden obtener nuevas formas variando el ángulo de intersección, el tamaño de los cilindros, y el número de ellos en tales intersecciones. Este número no es preciso restringirlo a dos.

- Ensamblaje de bóvedas de cañón para cubrir plantas rectangulares. Esta estructura se ha venido utilizando desde los comienzos de la moderna era de las láminas. Se pueden conseguir diseños nuevos variando la forma de las partes, su modo de unión (cóncava, convexa, tipo traslúcida), utilizando trozos de plano (lámina plegada) o cambiando la orientación de éstos.
- Ensamblaje de paraboloides hiperbólicos para conseguir una cubierta tipo paraguas. Este tipo de láminas ha sido ampliamente utilizada, particularmente en las dos últimas décadas. La variación de la forma se puede conseguir por cambio de la situación de los soportes, de la altura, del número de paraboloides o la forma de la planta.

### 1.3.8. Láminas plegadas

Como se ha definido en el párrafo 1.2.1., las láminas plegadas son ensamblajes de elementos bidimensionales planos unidos en sus bordes para formar un sistema estructural en el espacio. Dependiendo del tipo de ensamblaje final, se pueden diferenciar dos tipos de láminas plegadas:

- Lámina plegada que, en el límite, al disminuir el tamaño del elemento plano, tiende a una superficie de forma geoméricamente continua.
- Lámina plegada que, en el límite, tiende a una superficie de forma no geoméricamente continua.

De acuerdo con la práctica común, las láminas plegadas se clasifican en función de la forma de los elementos planos que las definen, tal como sigue:

*Láminas plegadas prismáticas:* Los elementos planos son rectángulos con dos de los lados opuestos mucho mayores que los dos restantes. Los rectángulos se unen a lo largo de los lados mayores para definir una superficie cilíndrica que se enmarca en elementos transversales y soportes. Las láminas plegadas prismáticas pueden definirse como superficies transversales, con generatriz a manera de cadena de segmentos rectos y directriz recta.

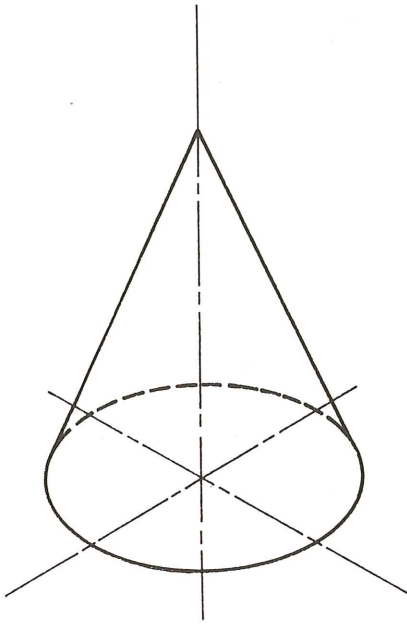
*Láminas plegadas no prismáticas:* Los elementos planos son trapezoides o triángulos, unidos a lo largo de los bordes mayores y enmarcados en elementos transversales y soportes.

*Láminas plegadas poliédricas:* Los elementos planos son polígonos cuyos lados tienen todos el mismo orden de magnitud, unidos a lo largo de los contornos para formar una superficie ensamblada en el espacio.

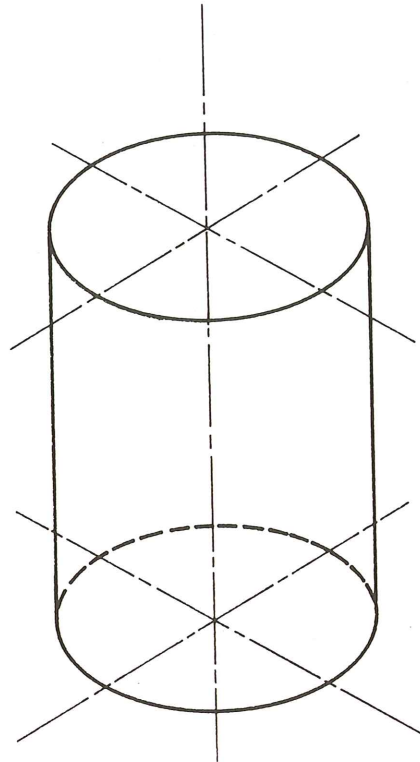
### 1.3.9. Superficies mínimas

De la definición de superficies mínimas, se sigue que las curvaturas principales en cualquier punto son de signo contrario y de igual valor absoluto. Por lo tanto, son particularmente apropiadas para la construcción de láminas de tracción, tema fuera del alcance de las presentes Recomendaciones.

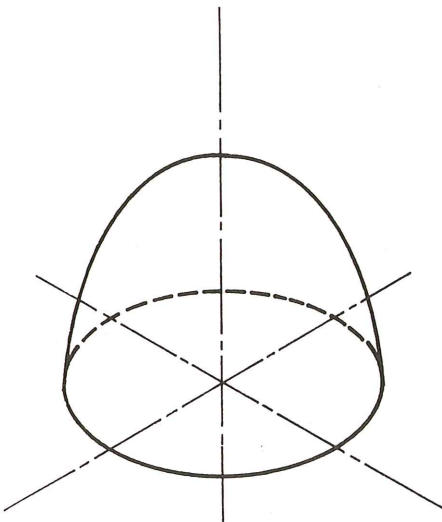




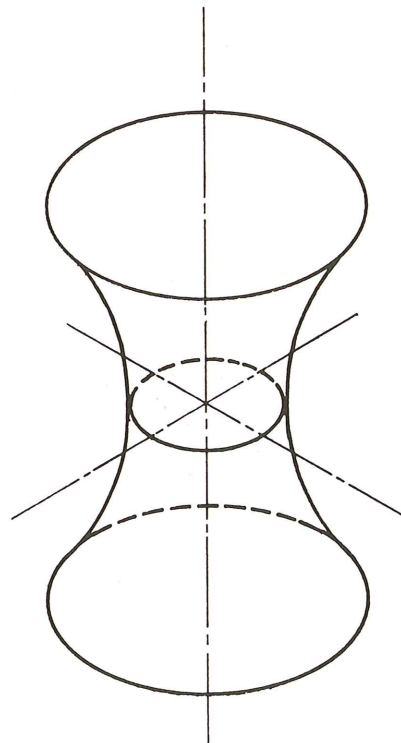
*Fig. 1.1. Cono*



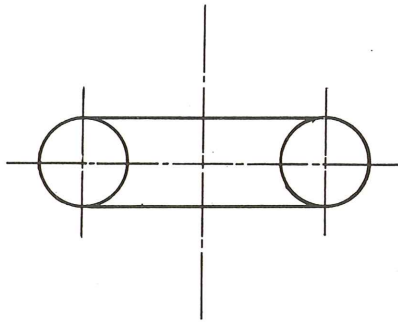
*Fig. 1.2. Cilindro*



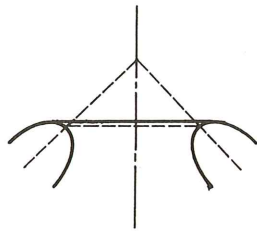
*Fig. 1.3 Cúpula de revolución*



*Fig. 1.4. Hiperbolide de revolución (una hoja)*

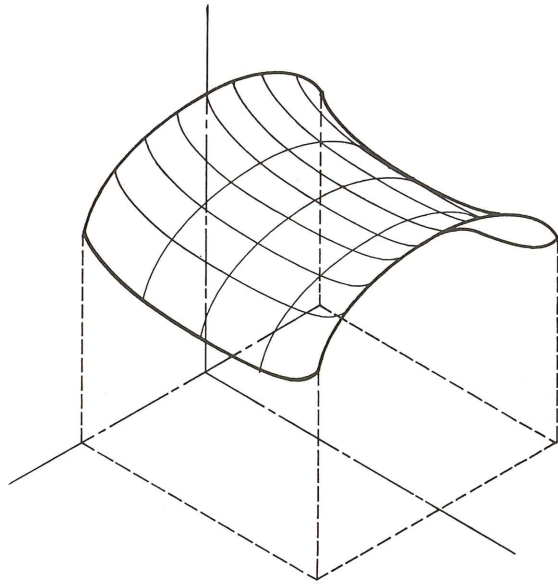


(a) *Generatriz circular.*

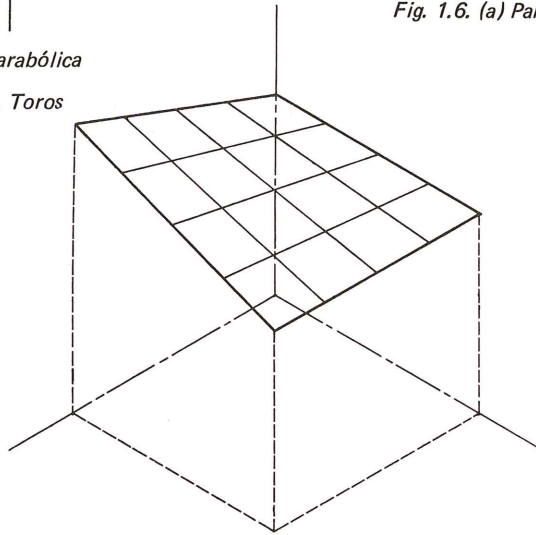


(b) *generatriz parabólica*

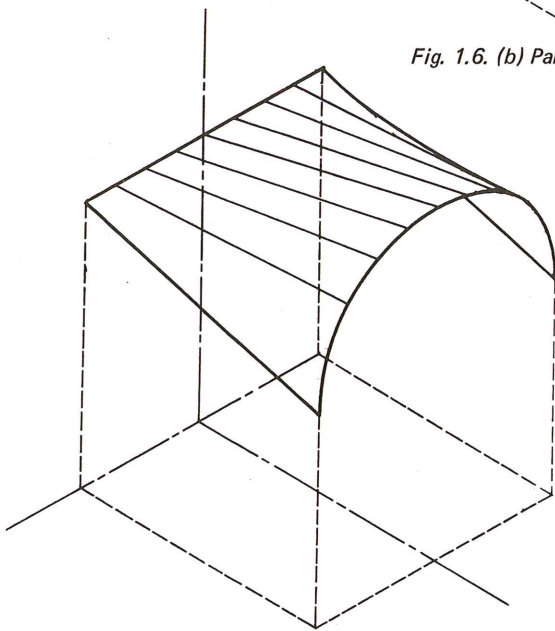
*Fig. 1.5. Toros*



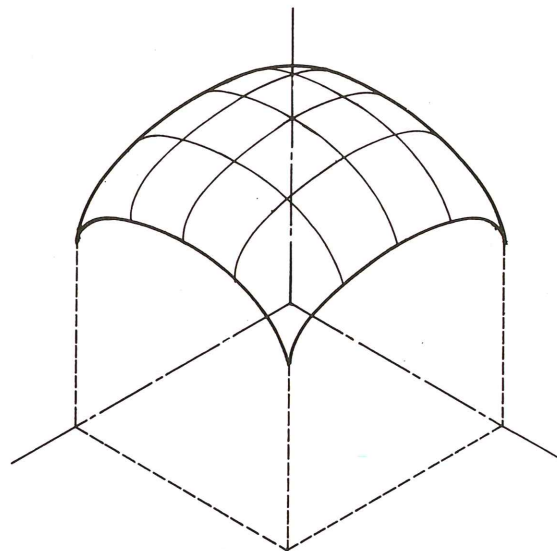
*Fig. 1.6. (a) Paraboloide hiperbólico*



*Fig. 1.6. (b) Paraboloide hiperbólico*



*Fig. 1.7. Conoide*



*Fig. 1.8. Paraboloide elíptico*

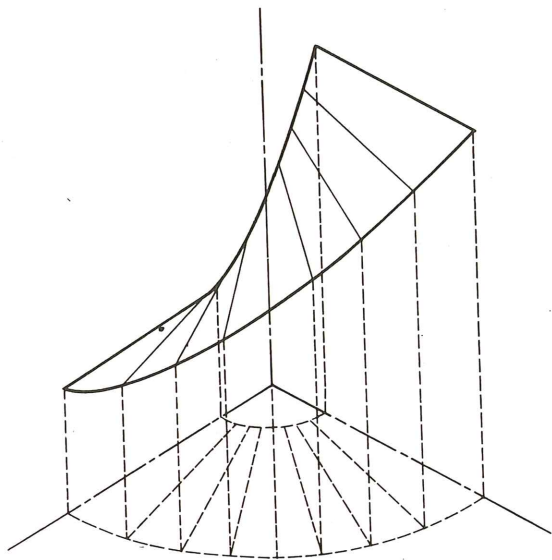


Fig. 1.9. Helicoide

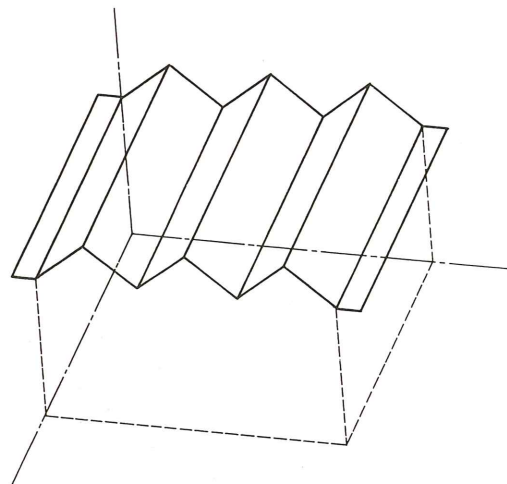


Fig. 1.10. Lámina plegada prismática

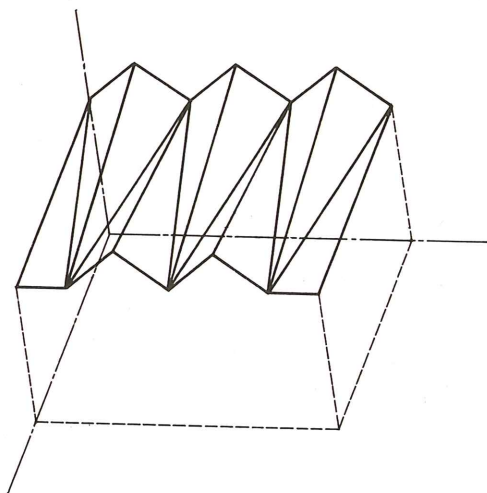


Fig. 1.11. Lámina plegada no prismática

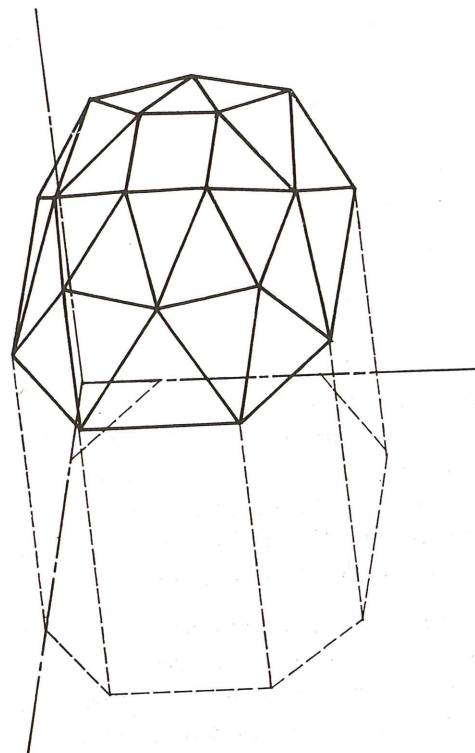


Fig. 1.12. Lámina plegada poliédrica



#### 1.4. Alcance de estas recomendaciones

Con la salvedad hecha donde corresponda, las presentes Recomendaciones son aplicables al diseño, cálculo y construcción de láminas delgadas de hormigón; incluyendo los componentes de lámina delgada, los elementos de las láminas entramado (si existen), y, los elementos auxiliares de tales estructuras.

En general, estas Recomendaciones no pretenden incluir dos tipos especiales de estructuras laminares: láminas de tracción y láminas hechas de ferrocemento. Las propiedades de los materiales de estos dos sistemas requieren consideraciones especiales y se remite a literatura especializada.

Análogamente, si las estructuras laminares a diseñar fuesen distintas a las usadas en edificación (tales como depósitos, torres de refrigeración, puentes, etc.), se deberán tener en cuenta las diferentes condiciones de carga, tensiones y deformaciones admisibles, así como, dimensionado del hormigón y armaduras y otros detalles característicos de la construcción de este tipo de estructuras.

Las presentes Recomendaciones pretenden ser un suplemento, no exhaustivo de cualquier código o regulación. Por lo tanto, las disposiciones aquí contenidas deben ser aplicadas en aquellas condiciones no previstas en los códigos, o cuando lo sean, se aplican las más estrictas de las dos. Sólo en casos excepcionales, y cuando la normativa lo permita, los proyectistas podrán acogerse a las presentes Recomendaciones, incluso si estas fuesen menos estrictas que la de los códigos.

## CAPITULO 2: RESISTENCIA Y CONDICIONES DE SERVICIO

### 2.1. Consideraciones generales

Al igual que en otros sistemas estructurales, las láminas delgadas de hormigón deben ser analizadas bajo las perspectivas de resistencia y serviciabilidad.

*Proyecto de resistencia:* Consiste en el análisis de la lámina, dimensionado del hormigón y armaduras de modo que las tensiones admisibles no sean superadas. Toda lámina debe ser proyectada para resistir las cargas de trabajo, en régimen elástico es la hipótesis de cálculo normalmente aceptada. Salvo en algunas excepciones discutidas en el Capítulo 4, también, el dimensionado del hormigón y armaduras debe ser estudiado en régimen elástico. El cálculo en rotura solo debe ser utilizado como complemento del anterior bajo cargas de trabajo (cálculo en tensiones admisibles) y únicamente, si ello esta sancionado por la práctica. Aquí, se entenderá por cálculo en rotura a la determinación de las tensiones basada en un cálculo elástico y lineal de las combinaciones de cargas descritas en el apartado 2.5 de las presentes Recomendaciones.

*Proyecto de las condiciones de servicio:* Consiste en asegurar que los desplazamientos admisibles no son superados, y si ocurriese fisuración, controlar el ancho, longitud y frecuencia de aparición de las fisuras. La comprobación de la serviciabilidad se deberá realizar bajo las cargas de trabajo, independientemente de que la resistencia se halla calculado en tensiones admisibles o en rotura.

En el capítulo 3 de estas Recomendaciones se discuten otros fenómenos que deben ser investigados en el cálculo de las láminas.

## 2.2. Acciones

En el proyecto de una estructura laminar deben considerarse diferentes cargas y combinación de ellas. En general, la naturaleza y magnitud de las cargas deben ser las prescritas por la normativa pertinente. En lo que sigue, se estudian algunas peculiaridades de las cargas para el caso de estructuras laminares.

### 2.2.1. *Peso propio*

Además del peso propio típico de toda estructura, se debe considerar especialmente el efecto del peso de los elementos de borde, tales como las vigas de borde en los paraboloides hiperbólicos o bóvedas de cañón, así como los efectos de cualquier sobrespesor previsto en algunas zonas de la estructura, tales como las de las limahoyas de las bóvedas de cañón o en los contornos laminares. En muchos casos, los efectos de estas cargas pueden ser mayores que los debidos al peso propio de la lámina.

La secuencia del desencofrado debería ser considerada en la determinación del modo como la carga de peso propio inicia su actuación sobre la estructura laminar.

### 2.2.2. *Sobrecarga de uso*

Normalmente, las láminas no son demasiado sensibles a cargas parciales. La razón de ello es que, a diferencia de otro tipo de estructuras más convencionales tales como los arcos, una lámina de una geometría determinada es capaz de transmitir las cargas fundamentalmente mediante tensiones en su plano para cualquier tipo de distribución de carga. Por lo tanto, no es necesario normalmente un estudio de los efectos de cargas parciales en lo concerniente a la lámina propiamente dicha. Sin embargo, puede ser necesario el análisis de los efectos de las cargas parciales en los soportes, columnas y cimentación.

### 2.2.3. *Carga de nieve*

En aquellas zonas donde la nieve tiende a depositarse, como en los valles de las bóvedas de cañón, se debe tener en cuenta el peso adicional debido a esta sobrecarga.

### 2.2.4. *Carga de viento*

En general los efectos del viento en láminas no son excesivamente graves y pueden ser evaluados por los procedimientos habituales. Se debe tener en cuenta, la posibilidad de succión sobre toda la superficie laminar, como en el caso de cúpulas o bóvedas de cañón.

### 2.2.5. *Cargas sísmicas*

Durante un terremoto, la cimentación de la estructura de la cual la lámina forma parte está sometida a aceleraciones tanto horizontales como verticales. En consecuencia, la lámina sufre movimientos y deformaciones y, por lo tanto, tensiones internas, cuya magnitud debe ser estudiada.

Normalmente, una estructura laminar es más rígida que una estructura de barras convencional, y, de aquí, que las tensiones producidas por causas sísmicas sean mayores.



Los cimientos de los soportes de las láminas deben estar interconectados por un sistema de entramado plano para disminuir el movimiento relativo horizontal que pueda acontecer durante el terremoto. Análogamente, para reducir el efecto de la componente vertical del movimiento del terreno, las cimentaciones deben proyectarse para minimizar tanto como sea posible el desplazamiento vertical diferencial de los soportes.

#### 2.2.6. *Temperatura, retracción y fluencia*

Generalmente, existen cargas inducidas como consecuencia de las coacciones a que se somete el movimiento de la estructura, o como resultado de los movimientos diferenciales debidos a estos efectos.

Debe prestarse especial consideración a las fuerzas inducidas en soportes o elementos de bordes con centroides excéntricos respecto a la lámina, para evitar el desplazamiento progresivo y la posible flexión, quizás significativa, en estos elementos.

#### 2.2.7. *Cargas constructivas y movimientos de los soportes*

Cada etapa constructiva debe ser estudiada con detenimiento para asegurar que las cargas en cada momento pueden ser soportadas por el sistema estructural existente. Los movimientos diferenciales de los soportes pueden introducir notables tensiones en las láminas; por lo tanto, deben ser minimizados o bien sus posibles efectos ser incluidos en el cálculo.

#### 2.2.8. *Esfuerzos de pretensado*

Las concentraciones locales en los anclajes deben ser estudiadas como en cualquier otro sistema estructural, teniendo en cuenta el pequeño espesor de lámina en dichos puntos y la necesidad de impedir que los tendones produzcan la rotura de la lámina en dirección transversal, así como el deslizamiento de la lámina en su propio plano.

Debe preverse en el análisis la componente normal a la superficie laminar de las fuerzas de pretensado debido a la curvatura de los tendones que pueda existir.

### 2.3. **Propiedades de los materiales**

A continuación se discuten algunas de las propiedades del hormigón que tienen particular interés en el diseño de láminas. Para mayor información, se deben consultar publicaciones especializadas, tales como las que realiza el Comité Euro-International du Béton y el American Concrete Institute.

#### 2.3.1. *Hormigón*

*Resistencia:* La resistencia característica de una probeta cilíndrica de hormigón, a los 28 días,  $f_c'$ , será superior a 20 N/mm<sup>2</sup>.

*Módulo de elasticidad:* El módulo de elasticidad del hormigón,  $E_c$ , medido en N/mm<sup>2</sup>, se calculará de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$E_c = \bar{w}^{1.5} \cdot 0,044 \sqrt{f_c'}; \quad (1440 \leq \bar{w} \leq 2480) \quad (2.1)$$



Donde  $\bar{w}$  es la densidad de hormigón medida en  $\text{kg/m}^3$  y  $f'_c$  es la resistencia característica a los 28 días en  $\text{N/mm}^2$

*Coefficiente de Poisson:* El valor del coeficiente de Poisson,  $\nu$ , del hormigón se considera normalmente nulo en el cálculo de láminas. En aquellos casos en el que el efecto del coeficiente de Poisson se prevea significativo, su valor se determinará a través de ensayos, y en su defecto se tomará 0.20.

*Variación de  $f'_c$  y  $E_c$  con el tiempo:* Tanto la resistencia a compresión como el módulo de elasticidad del hormigón aumentan con el tiempo. Los valores de la Tabla 2.1 muestran la banda de variación de acuerdo con datos experimentales obtenidos a 28 días, 1 y 3 años.

*Retracción:* Al hablar de las propiedades de retracción sólo se puede generalizar dentro de amplios márgenes. Debido a ello deben utilizarse, siempre que sea posible, datos experimentales. En ausencia de estos se puede usar la siguiente información. Desde el punto de vista de proyecto, la retracción libre del hormigón de arena compactada y grava (exclusivamente retracción plástica) puede ser calculada con la fórmula:

$$\epsilon_{sh} = 0,0000125 \cdot (90 - H) \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon_{sh}$  es la deformación unitaria por retracción, y H es la humedad porcentual.

*Fluencia:* La imposibilidad de generalizar, comentada en el párrafo anterior al hablar de retracción, se aplica de igual manera al caso de fluencia, cuyo cálculo debe basarse en datos experimentales de las condiciones particulares del hormigón. A falta de tales datos, pueden en proyectos normales utilizarse los de la Tabla 2.2, tanto para el hormigón aligerado como para hormigón normal. De esta tabla, debe tenderse a emplear los valores más pequeños, excepto cuando la edad del hormigón en el momento de aplicar las cargas mantenidas sea del orden de días o de una semana. Para cargas de duración menor que "permanente", los porcentajes de fluencia final son aproximadamente 12, 35 y 75 por 100 para duraciones de carga de un día, un mes y un año, respectivamente.

**TABLA 2.1**

Aumento relativo de las magnitudes de  $f'_c$  y  $E_c$ , en uno y tres años

Resistencia relativa de compresión $f'_c$			Módulo relativo de elasticidad $E_c$		
28 días	1 año	3 años	28 días	1 año	3 años
1,00	1,2 - 1,4	1,26 - 1,48	1,00	1,40 - 1,53	1,40 - 1,58

**TABLA 2.2**

Variación de los valores del coeficiente de fluencia  $C_u$ , cociente de la deformación última de fluencia respecto a la deformación elástica inicial

Resistencia del hormigón	Humedad relativa media			Valores medios para condiciones normales
	100%	70%	50%	
Ordinaria ( $20 \text{ N/mm}^2 \pm$ )	1 - 2	1,5 - 3	2 - 4	2
Alta ( $33 \text{ N/mm}^2 \pm$ )	0,7 - 1,5	1 - 2,5	1,5 - 3,5	1,5

### 2.3.2. Acero de las armaduras

El límite elástico máximo especificado,  $f_y$ , del acero de las armaduras no debe ser superior a  $420 \text{ N/mm}^2$ , salvo que la tensión admisible sea controlada para no producir grandes deformaciones. El módulo de elasticidad,  $E_s$ , del acero de armaduras (no de pretensado) se tomará igual a  $210.000 \text{ N/mm}^2$ .

### 2.3.3. Acero de pretensado y nervios

La resistencia y el módulo de elasticidad del acero de pretensado y de los cordones de cables deben ser determinados experimentalmente, o bien, atenerse a la normativa existente.

## 2.4. Proyecto en cargas de trabajo (Resistencia y Serviciabilidad)

### 2.4.1. Tensiones admisibles

Las tensiones admisibles en el hormigón y en el acero de las armaduras utilizadas en el proyecto, respecto a la carga de trabajo, deben cumplir la normativa existente.

### 2.4.2. Desplazamientos admisibles

*Lámina, elementos de borde y elementos rigidizadores:* Debido a la gran variedad de geometrías posibles de superficies laminares y su modo de unión con los elementos de borde y rigidizadores, no es útil limitar los desplazamientos de forma general. Varios son los factores a considerar por el proyectista a la hora de estudiar los desplazamientos máximos admisibles en láminas. Estos incluyen el evitar curvaturas antiestéticas, el de prevenir fisuras, los requisitos de las conexiones entre la lámina y los elementos no estructurales, tales como ventanas, o muros, y finalmente, en el caso de cubiertas, la necesidad de asegurar un drenaje adecuado.

En el Capítulo 3 de estas Recomendaciones se exponen otros comentarios acerca de las limitaciones de los desplazamientos en láminas.

*Elementos de apoyo:* Los desplazamientos de los elementos de apoyo no deben superar los límites prescritos para elementos de estructuras convencionales definidos por la normativa vigente.

En general, los movimientos de las láminas con importantes elementos de apoyo en su perímetro, las cúpulas por ejemplo, son raramente importantes. Las láminas con tendencia a producir movimientos significativos son aquellas que tienen sus bordes libres o simplemente rigidizados con costillas o miembros de borde tales como algunos tipos de paraboloides hiperbólicos y láminas cilíndricas. Este efecto se acentúa en el caso de grandes vanos.

En cargas de larga duración, la fluencia y la retracción pueden aumentar dos o tres veces los desplazamientos elásticos calculados bajo carga de trabajo, efecto que debe ser tenido en cuenta en el cálculo.

En las uniones de los elementos no estructurales con la lámina, se debe contar con los desplazamientos de ésta bajo las cargas permanentes y sobrecargas de uso.

### 2.4.3. Control de la fisuración

El control de la fisuración puede ser abordado por medio de las indicaciones concernientes a las armaduras, del Capítulo 4 de estas Recomendaciones. En general, el empleo de gran número de barras de pequeño diámetro, necesarias para conseguir las secciones de acero requeridas, reducen el grado de la fisuración.

### 2.5. Proyecto en cargas de rotura

La carga de rotura de la lámina y de sus elementos auxiliares no debe ser menor que U calculada por las fórmulas siguientes, donde D es la carga permanente, L es la sobrecarga de uso, W es la carga de viento y E es la carga sísmica.

*Carga permanente y sobrecarga de uso:*

$$U = 1,4 D + 1,7 L \quad (2.3)$$

o

$$U = 0,9 D + 1,7 L \quad (2.4)$$

*Carga permanente, sobrecarga de uso y carga de viento:*

$$U = 0,75 (1,4 D + 1,7 L + 1,7 W) \quad (2.5)$$

o

$$U = 0,9 D + 1,3 W \quad (2.6)$$

*Carga permanente, sobrecarga de uso y carga sísmica:*

$$U = 1,4 (D + L + E) \quad (2.7)$$

o

$$U = 0,9 D + 1,4 E \quad (2.8)$$

*Efectos de la fluencia, retracción, temperatura y movimiento de los apoyos:*

Estos efectos deben ser sumados a los de las cargas permanentes, y la carga U se calculará a partir de la fórmula:

$$U = 0,75 (1,4 D + 1,7 L) \quad (2.9)$$

Los factores de reducción de la capacidad resistente serán tomados de las normas existentes; no obstante, para el cálculo de la lámina propiamente dicha, en compresión en su plano, deberá utilizarse un coeficiente no mayor de 0,70.

Nótese que las ecuaciones de (2.3) a (2.9) no son únicas; se basan en las publicaciones del American Concrete Institute. Sin embargo, cuando aparezcan en la normativa pertinente ecuaciones semejantes a éstas, se respetarán.



## CAPITULO 3: CALCULO

### 3.1. Introducción

#### 3.1.1. Consideraciones generales

El cálculo puede definirse como aquella parte del proyecto en la cual se investiga la resistencia y condiciones de servicio de la lámina y sus elementos auxiliares. Normalmente, el proceso es complicado, y se hace más dificultoso por la no homogeneidad y anisotropía del material. Es más, debe recordarse que la respuesta de una estructura de hormigón armado es no uniforme en las etapas de prefisuración (elástica), posfisuración (anelástica) y rotura puesto que en cada una exhibe un comportamiento de características diferentes.

El objetivo del cálculo es la evaluación de las deformaciones y tensiones internas en la lámina. Basándose en una predicción razonable tanto de la distribución como de la magnitud de los esfuerzos y tensiones se puede obtener el espesor de hormigón, así como, la cuantía de la armadura necesarios para satisfacer los criterios de resistencia, serviciabilidad y estabilidad que a continuación se exponen.

*Resistencia:* La resistencia de la lámina y sus elementos auxiliares debe ser tal que en condiciones de trabajo las tensiones no sobrepasen los límites marcados en el párrafo 2.4.1., y que la carga de rotura de la estructura sea mayor que la combinación de cargas definidas en el párrafo 2.5.

*Serviciabilidad:* Los desplazamientos de la lámina y sus elementos auxiliares, en condiciones de trabajo, deben cumplir las especificaciones expuestas en el párrafo 2.4.2.

*Estabilidad:* La lámina y sus elementos auxiliares deben permanecer estables; es decir, no deben experimentar grandes incrementos en las deformaciones al aumentar ligeramente las cargas aplicadas. Además, la lámina no debe ser un mecanismo: su geometría y su forma de sustentación debe ser tal que no admita cambios notables de forma al variar ligeramente los esfuerzos en su plano (ver la discusión acerca de “flexión sin extensión”, que se expone más adelante).

#### 3.1.2. Tipos de cálculo

Se pueden diferenciar dos tipos generales de análisis.

*Cálculo matemático:* La lámina se define por un modelo matemático obtenido en base a una serie racional de hipótesis unidas a las leyes de la mecánica estructural, a las propiedades de los materiales y al comportamiento observado de las estructuras. Cualquier tipo de simplificación del cálculo debe hacerse en consideración a la naturaleza del problema estudiado. La solución en sí misma puede ser analítica o numérica; un ejemplo de este último tipo es el método de los elementos finitos (método típicamente orientado hacia el ordenador). El cálculo matemático debe ser utilizado en todos los proyectos de estructuras laminares.

*Cálculo experimental:* Este tipo de cálculo consiste en la obtención de datos medidos en un modelo de tamaño natural o a escala reducida de la lámina, construido teniendo en cuenta la geometría de la lámina y sus soportes, la naturaleza de los materiales y cargas, y, las leyes de semejanza. El modelo puede representar ya el prototipo o el modelo matemático, pero el análisis experimental debe ser usado solamente como ayuda en la obtención de un modelo matemático racional, o como comprobación de los resultados obtenidos por

medio del cálculo matemático. Con la llegada de los poderosos métodos de ordenador, los modelos experimentales han perdido parte de su importancia; su campo fundamental de aplicación, actualmente, es la investigación del comportamiento anelástico de las láminas y sus estados límites, donde el análisis matemático correspondiente puede no ser practicable; también pueden ser útiles en la etapa de la concepción del diseño.

### 3.1.3. Comprobaciones

Después de todo cálculo, debe procederse a una comprobación estática del equilibrio en varias secciones de la lámina, escogidas por su importancia en el conjunto, para asegurarse de que las fuerzas internas obtenidas a través del cálculo están en equilibrio con las fuerzas externas. En el caso de láminas de geometría y dimensiones poco frecuentes puede interesar comprobar que el comportamiento anunciado por el cálculo en todas sus fases (elástica, inelástica y estados límite), corresponde al de un modelo de microhormigón a escala reducida.

## 3.2. Formulaciones analíticas y soluciones

### 3.2.1. Consideraciones generales

Una estructura laminar, a pesar de su pequeño espesor, es tridimensional. Por lo tanto, el problema del cálculo laminar podría formularse como un problema de elasticidad tridimensional, con una geometría determinada, unas cargas y unas propiedades de los materiales que forman la estructura. Sin embargo, incluso en el caso de que el sistema de ecuaciones resultante fuese lineal, el cálculo de la lámina sería prohibitivamente difícil, y no se intenta normalmente. Por lo tanto, es necesario transformar el problema en otro más abordable a través de la introducción de algunas hipótesis encaminadas a la simplificación de uno, o varios aspectos. Las hipótesis pueden simplificar la formulación del problema, su solución (incluyendo el trabajo numérico), o reducir las dificultades conceptuales del análisis laminar. En general, asociada a cada una de las hipótesis simplificadoras existe una pérdida de exactitud en la solución numérica.

*Hipótesis fundamental de la teoría de láminas:* El espesor de la lámina se considera muy pequeño respecto al resto de dimensiones de la misma. Esta hipótesis permite reducir el problema de tres a dos dimensiones y el proyectista puede contemplar la lámina como una superficie bidimensional. De ahí, se obtiene un sistema de ecuaciones que, junto con las condiciones de contorno, definen el comportamiento de las láminas. El sistema consta de “las ecuaciones de equilibrio”, de las relaciones “desplazamientos-deformaciones”, y, de las “relaciones constitutivas” entre tensiones o momentos y deformaciones o cambios de curvatura de la superficie media. Además, esta última debe satisfacer una serie de “ecuaciones de compatibilidad” que reflejan el hecho de que la lámina, vista como una superficie elástica, no experimenta discontinuidades geométricas a consecuencia de las deformaciones resultantes. En una teoría laminar internamente consistente, la ecuación que define el equilibrio de momentos respecto al eje normal se satisface idénticamente. Es más, una teoría de láminas consistente permite la “analogía estático-geométrica”, en la que las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, de las cuales se han eliminado los esfuerzos cortantes transversales con ayuda de las dos ecuaciones restantes de equilibrio de momentos, son análogas a las tres ecuaciones de compatibilidad.

Además de la hipótesis fundamental del espesor de la lámina, se pueden enunciar otras hipótesis simplificativas. Cada hipótesis adicional se asocia a un nuevo modelo matemático,



y por lo tanto, a un nuevo sistema de ecuaciones. Idealmente, podría ser deseable obtener una teoría única y universalmente aceptada válida para todo tipo de geometría laminar; sin embargo, ello no parece útil, desde el punto de vista práctico. La mejor solución podría ser considerar cada geometría y cada sistema de cargas por separado, utilizando la más simple formulación apropiada para el caso en cuestión.

### 3.2.2. Breve resumen de las teorías de láminas

Varias teorías de láminas se exponen someramente a continuación.

*Teoría elemental o de primera aproximación:* Es la teoría laminar consistente más simple posible. Denominada normalmente "teoría elemental de Love", pues, a pesar de ser propuesta inicialmente por Aron<sup>1</sup> (1874), fue perfeccionada por Love<sup>2,3</sup> (1888). Algunas inconsistencias de la formulación de Love fueron corregidas por Sanders<sup>4</sup> (1959), e independientemente por Koiter<sup>5</sup> (1959). El espesor de la lámina se considera muy pequeño, no solamente comparado con las otras dimensiones, sino también, con respecto al radio de curvatura de la superficie media sin deformar. El efecto de la tensión normal transversal se considera muy pequeño respecto a otras componentes tensionales y la lámina se deforma de tal manera que las líneas rectas normales a la superficie media antes de la deformación permanecen rectas y normales a la superficie media después de la deformación (hipótesis de Kirchoff). Cuatro condiciones de contorno deben ser especificadas, incluyendo combinaciones de tensiones resultantes y momentos.

La teoría elemental de láminas no predice correctamente el comportamiento de éstas en las proximidades de las singularidades de la carga o del contorno, de forma semejante a lo que ocurre con la teoría de Kirchoff de placas.

*Teorías complejas o de aproximación superior:* Se pueden obtener teorías más sofisticadas, y que probablemente conducen a resultados más exactos, al liberarse de una o varias de las hipótesis de la teoría elemental. En la teoría de "Flügge<sup>6</sup> - Lur's<sup>7</sup> - Byrne<sup>8</sup>" (FLB) la razón del espesor al radio de curvatura no se considera despreciable frente a la unidad, a pesar de que se elimine el cuadrado de dicho cociente. Si bien con esta teoría se eliminan algunas inconsistencias de la formulación de Love, las condiciones de contorno son las mismas que en la teoría elemental y sigue fallando en las singularidades de carga y de contorno. La formulación FLB es notablemente más compleja y son bastante más difíciles de obtener soluciones analíticas. En la teoría de Reisser<sup>9</sup>, además de unas liberalizaciones semejantes a las de la formulación FLB, no se mantiene totalmente la hipótesis de Kirchoff: las líneas rectas y normales a la superficie media antes de la deformación permanecen rectas pero no necesariamente de igual longitud y normales a la superficie media después de la deformación. Las ecuaciones resultantes requieren cinco condiciones de contorno en función de los cinco esfuerzos (axiles y momentos). Ello permite predecir el comportamiento de la lámina en la proximidad de las singularidades, tanto de carga como de contorno.

Normalmente, el cálculo de las láminas de hormigón se lleva a cabo de acuerdo con la teoría elemental o con alguna versión simplificada de ésta.

### 3.2.3. Clasificación de los estados tensionales en láminas, según Koiter

Las ecuaciones de las láminas, incluso dentro de la formulación relativamente sencilla de la teoría elemental, son bastante complicadas y las soluciones de problemas concretos son difíciles de obtener. Existen excepciones en los casos de geometría particularmente simple, como en las esferas y otras láminas de revolución. La dificultad de conseguir soluciones

1) Los superíndices aluden a las referencias contenidas en el párrafo 6.2 del Capítulo 6, Bibliografía seleccionada de láminas.



analíticas aumenta con el refinamiento de las teorías y evidentemente se requieren hipótesis adicionales si se desea facilitar la obtención de estas soluciones.

Se han expuesto varias teorías simplificadas, siendo de particular interés aquellas de tipo general, es decir, las válidas para cualquier tipo de geometría. Su importancia se basa también en el hecho de que arrojan alguna luz sobre el modo de transmisión de cargas y deformación de las láminas.

A Koiter<sup>10</sup> se debe una sistemática clasificación de los estados tensionales en láminas, basada en dos parámetros. Uno de ellos es la razón entre la deformación por flexión,  $\epsilon_b$ , de la fibra extrema y la deformación de la fibra media por esfuerzo axial,  $\epsilon_m$ , ambas evaluadas en la zona de estudio. El otro parámetro es el cociente  $\lambda^2/(hR)$ ; donde  $\lambda$  es la "longitud de onda" del modo de deformación de la lámina,  $h$  su espesor y  $R$  el radio mínimo de curvatura, debiendo calcularse dichas magnitudes en la zona de estudio. De acuerdo con el orden de magnitud de ambos parámetros con respecto a la unidad, Koiter distingue nueve posibles estados tensionales en cada punto (véase la Tabla 3.1).

De los nueve estados tensionales de la Tabla 3.1, los tres que se analizan a continuación presentan un interés especial, tanto desde el punto de vista teórico como práctico: la lámina rebajada, la membrana y la flexión sin extensión.

**TABLA 3.1**

**Clasificación de Koiter de los estados tensionales aproximados en las láminas**

	$\lambda^2/(hR) \ll 1$	$\lambda^2/(hR) \simeq 1$	$\lambda^2/(hR) \gg 1$
$\epsilon_b/\epsilon_m \ll 1$	Tensión plana	Híbrido	Membrana
$\epsilon_b/\epsilon_m \simeq 1$	Híbrido	Lámina rebajada	Híbrido
$\epsilon_b/\epsilon_m \gg 1$	Flexión de placas	Híbrido	Flexión sin extensión

#### 3.2.4. Teoría de lámina rebajada

La importancia práctica de esta teoría se puede intuir por su posición central en la clasificación de Koiter. Normalmente, su exposición se asocia a los nombres de Donnell<sup>11</sup>, V. Karman<sup>12</sup>, Jenkins<sup>13</sup> y Vlasow<sup>14</sup>.

*Hipótesis:* Las hipótesis adicionales a las de la teoría elemental de láminas son el despreciar la influencia del esfuerzo cortante transversal en el equilibrio en su propio plano, así como las componentes de desplazamiento en su propio plano en la variación de la curvatura de la superficie media.

*Ecuaciones:* Se mantienen las características fundamentales de la teoría elemental: el sistema es de octavo orden, se conservan la presencia de los efectos flectores y los de tensión plana y se sigue requiriendo la especificación de las cuatro condiciones de contorno. Se consigue una notable simplificación respecto a la teoría elemental, debido a que todas las variables se pueden expresar en función de tan sólo dos: la función de tensiones de Airy,  $\Phi$ , y el desplazamiento vertical,  $w$ . Si no existen cargas aplicadas en su propio

plano, las ecuaciones en las coordenadas intrínsecas de la superficie laminar son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Phi + C \Delta_k w &= 0 \\ K \Delta \Delta w + \Delta_k \Phi &= p \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $K$  es la rigidez a flexión de la lámina,  $p$  es la carga normal aplicada,  $C$  es un parámetro proporcional a la rigidez de deformación plana,  $\Delta$  el Laplaciano, y  $\Delta_k$  es un operador en derivadas parciales de segundo orden que depende de la geometría de la superficie media y contiene las curvaturas de la lámina, pudiendo ser elíptico, parabólico o hiperbólico. En el caso particular de placa plana, dicho operador es idénticamente nulo y las ecuaciones (3.1) se convierten en las bien conocidas ecuaciones de "tensión plana" y "flexión de placas". La estructura de las ecuaciones (3.1) hace su solución más sencilla que la de la teoría elemental. Las condiciones de contorno son las mismas que en la teoría elemental.

*Campo de aplicación:* La teoría de láminas rebajadas falla en las proximidades de los puntos singulares, tanto de carga como de borde, y se pierde exactitud en los resultados a consecuencia de las dos hipótesis adicionales en que se basa esta teoría. En particular, pequeños movimientos de sólido rígido provocan deformaciones físicamente inadmisibles. No obstante, el campo de aplicación de la presente teoría es muy amplio, fundamentalmente para las láminas que se encuentran en la práctica. En caso de duda, se pueden comprobar los resultados aquí obtenidos introduciendo éstos en las ecuaciones de la teoría elemental más exacta, estimando así el error.

### 3.2.5. Teoría de membrana

*Hipótesis:* La hipótesis adicional a las de la teoría elemental es que los momentos resultantes son muy pequeños comparados con las fuerzas actuantes en su propio plano. Esto equivale a considerar despreciable la rigidez a flexión comparada con su rigidez a deformación axial, o bien, considerar los cambios de curvatura de la superficie media muy pequeños, en relación con las deformaciones en su propio plano.

*Ecuaciones:* Se pueden obtener directamente de las ecuaciones (3.1) haciendo  $K = 0$ , resultando

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Phi + C \Delta_k w &= 0 \\ \Delta_k \Phi &= p \end{aligned} \quad (3.2)$$

sistema de cuarto orden, la mitad del obtenido en la teoría elemental. Se aprecia que la integración puede hacerse por etapas: primero se obtiene la función de tensiones de Airy de la segunda ecuación, e introduciendo ésta en la primera de las ecuaciones (3.2) se obtiene  $w$ . La membrana es internamente isostática, análogamente a lo que ocurre con la teoría clásica de vigas.

El número de condiciones a especificar en el contorno es función de la naturaleza del operador  $\Delta_k$ , pero nunca más de dos. Si  $\Delta_k$  es elíptico son necesarias dos condiciones, una si  $\Delta_k$  es parabólico, y también dos en el caso de operador hiperbólico (láminas de curvatura Gaussiana negativa). Sin embargo, una lámina membrana de curvatura Gaussiana nula o negativa no puede satisfacer las condiciones de borde prescritas. Para un estudio completo del tema se remite a la literatura especializada<sup>15</sup>.

*Campo de aplicación:* La hipótesis de despreciar las tensiones debidas a los momentos conlleva una limitación en cuanto a la carga aplicable a una lámina membrana: deben ex-



clirse las cargas puntuales perpendiculares a la lámina, pues su presencia implicaría una zona de flexión en las proximidades de su punto de aplicación.

La teoría de membrana predice el comportamiento de la lámina de forma razonablemente válida, si las condiciones de contorno permitidas son compatibles con los apoyos de la lámina. Si esta condición no se satisface, o bien existen cargas concentradas, la teoría de membrana falla en las proximidades de las llamadas "líneas de distorsión": en el contorno, en las discontinuidades de la propia lámina o de sus cargas, etc. La amplitud de la zona en que no es aplicable la teoría de la membrana depende fundamentalmente de la geometría laminar y de la naturaleza de la distorsión. En las láminas normalmente empleadas en construcción de edificios, la línea de distorsión más importante es el borde laminar.

*Efecto de borde:* Para un número de láminas, incluidas las láminas de revolución, la zona donde la teoría de la membrana no se puede aplicar es relativamente estrecha, y el análisis de flexión necesario puede llevarse a cabo con suficiente aproximación por medio del estudio del "efecto de borde". La ecuación que define el efecto de borde puede obtenerse por un procedimiento asintótico; siendo ésta<sup>16</sup>

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \beta_1(\alpha_2) w = 0 \quad (3.3)$$

donde  $w$  es la componente normal del desplazamiento de la superficie media,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las coordenadas superficiales y  $\beta_1(\alpha_2)$  es un parámetro que depende de la geometría laminar y se considera (aproximadamente) como función de una sola de las coordenadas superficiales,  $\alpha_2$ .

La teoría de la membrana, junto al efecto de borde, es de suma importancia para el proyectista; con su ayuda se reducen a proporciones manejables problemas analíticos complejos. La hipótesis de transmisión de cargas por tensión plana es consistente con el comportamiento deseado de las láminas, lo cual hace de éstas un eficiente sistema estructural (una lámina proyectada para satisfacer las condiciones de contorno de membrana avalaría ser una buena estructura). Por último, cabe mencionar el hecho de que con frecuencia la solución de la teoría de membrana es una aproximación de una solución particular de la teoría de flexión; por ello, constituye un primer e importante paso para la obtención de la solución completa del problema laminar.

### 3.2.6. Flexión sin extensión

Se dice que una lámina está en un estado de flexión sin extensión cuando se pueden producir cambios de curvatura sin variación apreciable de las deformaciones en su propio plano. Por lo tanto, esta hipótesis se puede enunciar como la no consideración de las deformaciones tangenciales, y en consecuencia los esfuerzos en su plano. Se deduce que el término  $\Delta \Delta \Phi$  de la primera de las ecuaciones (3.1) desaparece, y la flexión pura queda definida por la ecuación:

$$\Delta_k w = 0 \quad (3.4)$$

Puesto que el operador de la ecuación (3.4) es el mismo que el de la membrana, la discusión de las condiciones de contorno en el presente caso sería la misma habida en el párrafo 3.2.5.

Un ejemplo de flexión sin extensión es el de una lámina cilíndrica apoyada en dos directrices. No obstante, la misma lámina apoyada en las dos generatrices de contorno sufriría cambios de deformación plana, y, por lo tanto, no se tendría un caso de flexión sin extensión.



Desde el punto de vista de proyecto, la importancia de la flexión pura estriba en que bajo dicho estado tensional la lámina trabaja de manera no deseable: resiste las cargas por flexión (no por acciones en su propio plano), y se deforma en exceso. Así, el diseño debe comprobarse para tener la seguridad de que ni la geometría ni la forma de apoyo favorecen el estado de flexión pura, particularmente en lo referente a las deformaciones.

### 3.2.7. Teorías aproximadas de láminas para casos particulares

Las formulaciones expuestas en los párrafos anteriores de lámina rebajada, membrana y flexión pura, pueden considerarse teorías de láminas aproximadas de carácter general, pues, dentro de los límites marcados por las simplificaciones, son aplicables a láminas de todo tipo de geometría.

No obstante, se pueden elaborar teorías aplicables a un número limitado de casos, siendo la naturaleza de las hipótesis a introducir en la teoría general función del problema a resolver. A continuación, se exponen algunas formulaciones de este tipo.

*Teorías de aproximación geométrica:* La geometría de la lámina se sustituye por una nueva, definiéndose generalmente ésta por partes de superficies elementales. En el límite, al disminuir el tamaño de los componentes, la nueva superficie tiende a la original. Como ejemplo, una superficie cilíndrica se puede aproximar por una serie de elementos planos y, una superficie de revolución por troncos de cono. Intuitivamente, parece plausible suponer que la solución basada en la geometría aproximada tienda a la solución real del modelo original. Es obvio que para que esta aproximación sea práctica su solución debe ser más sencilla de obtener que la de la superficie original.

*Teorías de aproximación estática:* Para láminas de determinados tipos de geometría se pueden hacer hipótesis respecto a las magnitudes relativas de algunos esfuerzos, fuerzas y momentos, con las correspondientes simplificaciones en las ecuaciones generales. Un ejemplo de esta aproximación es la teoría de la semi-membrana para láminas cilíndricas<sup>17</sup>.

*Teorías de aproximación mixtas:* En algunas láminas de geometría dada se pueden formular hipótesis suplementarias referentes tanto a su manera de deformarse como a la magnitud relativa de algunos esfuerzos, fuerzas y momentos. Como ejemplo de esta aproximación se puede citar la teoría de viga de láminas cilíndricas, y su correspondiente teoría de lámina plegada<sup>18</sup>.

Para la aplicación de este tipo de simplificaciones debe hacerse un cuidadoso análisis en cada caso, pudiéndose estimar el error introduciendo los resultados en un sistema de ecuaciones obtenidas según una formulación menos restrictiva.

### 3.2.8. Láminas plegadas

La geometría de las láminas plegadas —ensamblaje de elementos planos— simplifica el cálculo. Debido a que los elementos son planos todas las curvaturas desaparecen, y el operador  $\Delta_k$  es idénticamente nulo en todos los puntos. Así las ecuaciones (3.1) se convierten en

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Phi &= 0 \\ K \Delta \Delta w &= p \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde se emplea la misma notación que en el párrafo 3.2.4. Las ecuaciones (3.5) son las de tensión plana y las de flexión de placas según Kirchoff, y los dos modos de comportamiento dejan de estar acoplados. Tan sólo en algunos casos se pueden resolver las ecuaciones (3.5)

analíticamente, como en las láminas plegadas simplemente apoyadas en sus extremos, cuando la solución tipo Levy es aplicable. Normalmente, es necesario utilizar un método aproximado, o bien, uno numérico con ayuda de ordenador.

*Láminas plegadas prismáticas:* Este tipo de lámina plegada es muy usual en la práctica. Básicamente, se diferencian dos métodos de cálculo, a pesar de que en la literatura especializada existan diversas variantes de éstos. El “método viga” supone que la lámina plegada se comporta como una viga; ello implica que la sección transversal de la lámina plegada no varía de forma durante la deformación, siendo los movimientos de sólido rígido la parte dominante de los desplazamientos. Esta hipótesis, solamente, permite emplear el método de la viga para láminas plegadas de longitud apreciable, es decir, aquéllas en las que la longitud es notablemente mayor que las dimensiones de la sección transversal. El método puede aplicarse para cualquier tipo de sección, no obstante, si la sección no es simétrica, el cálculo se complica considerablemente. La “teoría ordinaria”<sup>19</sup> permite el cambio de forma de la sección transversal durante la deformación; en consonancia, su campo de aplicación incluye láminas plegadas más cortas.

*Lámina plegada no prismática:* El cálculo se complica notablemente cuando la lámina plegada es no prismática; por ello, se han desarrollado métodos de cálculo aproximados. En la “teoría ordinaria ampliada”<sup>20</sup>, el método de cálculo es semejante al de la teoría ordinaria, pero mucho más complicado debido a la geometría estructural. En una posterior modificación del procedimiento, las acciones transversales y longitudinales, incluido el efecto debido al movimiento relativo de las uniones, se impiden simultáneamente en varias secciones a lo largo de su luz. El campo de validez de esta formulación modificada no está perfectamente establecido.

*Lámina plegada poliédrica:* No existen métodos analíticos de cálculo sistemáticos para este tipo de láminas, debiéndose recurrir a los métodos numéricos; entre ellos destaca, el método de los elementos finitos, ya que elementos finitos desacoplados definen exactamente la geometría de la lámina plegada poliédrica.

### 3.2.9 Comentarios acerca de las soluciones analíticas

Debido a la complejidad de los sistemas de ecuaciones que definen el comportamiento laminar, la obtención de sus soluciones es generalmente muy difícil. Estando fuera del alcance de estas Recomendaciones la discusión de las técnicas de solución de los problemas de contorno. Nótese que, como consecuencia de la facilidad de disponer de ordenadores y de programas para resolver problemas de láminas, la importancia de los métodos analíticos como “herramienta de proyecto” ha disminuido notablemente, habiendo sido sustituidos por los métodos numéricos. Sin embargo, los métodos analíticos siguen manteniendo su importancia, pues permiten la necesaria visión del comportamiento “cualitativo” de las estructuras laminares.

*Significado general de la solución:* Las integrales de los sistemas de ecuaciones homogéneos pueden escribirse aproximadamente, en sentido asintótico, en forma de

$$f = \exp(\pm \beta_2 \alpha) \frac{\sin}{\cos}(\beta_3 \alpha) \quad (3.6)$$

donde  $f$  es cualquiera de las variables laminares deseadas,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  son parámetros de la lámina, y,  $\alpha$  es una coordenada espacial. Se observa que la solución tiene la forma de una onda exponencial, ya sea creciente o decreciente.

*Elementos auxiliares de solución:* Para varios tipos de geometrías laminares y cargas, se pueden encontrar elementos auxiliares de solución en la literatura especializada. Tales



ayudas se presentan en forma de soluciones expresadas analíticamente y de tablas y gráficos de diversas variables útiles en el proyecto. Algunas de éstas se dan en las referencias del Capítulo 6 de las presentes Recomendaciones.

### 3.3. METODOS NUMERICOS

#### 3.3.1. Consideraciones generales

Debido a que las soluciones analíticas de las ecuaciones laminares son difíciles de obtener, frecuentemente el único camino es recurrir a los métodos numéricos, clasificándose éstos en dos categorías generales.

*Métodos numéricos clásicos*<sup>21</sup>: Son los desarrollados en las épocas anteriores a los ordenadores; entre ellos están los métodos de integración paso a paso, y el método de las diferencias finitas en todas sus variantes, frecuentemente asociados al método de relajación. Varios de estos procedimientos se han adaptado a los ordenadores, normalmente con gran éxito.

*Métodos orientados al ordenador*: Se han desarrollado mucho debido a la facilidad de acceso a los ordenadores electrónicos; a modo de ejemplo, se pueden citar el método de diferencias finitas en energía y el método de los elementos finitos. Nótese que la importancia de estos procedimientos se basa en la rapidez de cálculo de los ordenadores.

A causa del gran desarrollo de los ordenadores y de los métodos numéricos asociados, aquí sólo se incluye una breve discusión sobre el tema. Para mayor detalle consultar la cada vez más abundante literatura especializada en la materia.

#### 3.3.2. Integración numérica de las ecuaciones laminares<sup>22</sup>

Consiste en métodos clásicos de integración adaptados al ordenador, y se aplica a aquellos problemas laminares reducibles a una ecuación diferencial ordinaria. Los problemas de contorno se convierten en problemas de condiciones iniciales en términos de un sistema de ecuaciones de primer orden. El sistema se integra por medio de algún algoritmo adecuado, tal como el "método de Runge-Kutta" (RK), normalmente unido a la técnica de la matriz de transferencia. El algoritmo RK evalúa la variable en cada paso como función del valor en el paso previo. Si se desea un algoritmo más sofisticado se puede definir la variable en función de los valores de ésta y/o de sus derivadas en varios puntos anteriores; además, es posible iterar en cada paso para mayor exactitud. Debido a la forma exponencial de la solución, como se vio en el párrafo 3.2.9., el error de redondeo puede requerir la subdivisión del problema, lo cual aumenta el trabajo numérico.

#### 3.3.3. Procedimientos clásicos de diferencias finitas<sup>23</sup>

El método de diferencias finitas (FD) es un procedimiento de discretización en el cual el dominio continuo del problema se transforma en uno discreto por medio de la introducción de un sistema de puntos nodales; con ello el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en un sistema algebraico de ecuaciones cuyas variables son las incógnitas del problema en los puntos nodales.

El procedimiento exige que el valor de la derivada de la función en el nodo esté expresado en términos del valor de la función en dicho punto y de otros nodos vecinos. El error del método se debe a la propia aproximación de las expresiones resultantes, pudiéndose aumen-



tar la exactitud de los resultados por reducción de la distancia entre puntos nodales. Por la pérdida de exactitud debida a la diferenciación numérica, el sistema de ecuaciones debe ser planteado en términos del menor orden posible: en nuestro caso un sistema de ocho ecuaciones de primer orden; sin embargo, esto aumenta el número de ecuaciones algebraicas. En el caso de flexión en láminas, lo usual es el empleo del sistema básico que consiste en las tres primeras ecuaciones de equilibrio en términos de las componentes del desplazamiento de la superficie media. Para evitar ciertas inconsistencias, la ecuación que relaciona las derivadas de orden par deben situarse en los puntos nodales, mientras que las que contienen las derivadas de orden impar deben ubicarse en los puntos medios entre nodos.

Son posibles varias alternativas para formular las ecuaciones algebraicas en el contorno. El método que mantiene la misma exactitud que en el interior consiste en utilizar en cada punto del contorno el mismo sistema de ecuaciones aplicable a cualquier punto del interior, además de expresar las condiciones de contorno en forma de diferencias finitas; ello requiere la introducción de puntos nodales ficticios fuera de la lámina, además de aumentar el número total de ecuaciones algebraicas del sistema.

Para aumentar la exactitud, se puede utilizar un procedimiento de extrapolación basado en dos o más soluciones obtenidas para diferentes tamaños de malla. La extrapolación de Richardson es un ejemplo de tal procedimiento; sin embargo, debe ser utilizado con precaución, pues con certeza solamente mejora los resultados en los casos de convergencia monótona.

Los procedimientos de diferencias finitas son capaces de acomodarse a superficies irregulares, y a puntos de contorno no situados en la malla básica; no obstante, ello se consigue a costa de aumentar notablemente el trabajo numérico.

Se pueden distinguir varias formulaciones del procedimiento diferencias finitas. "La formulación común FD" utiliza términos tales en que el error es proporcional al cuadrado de la distancia nodal (aquí, se puede aplicar la extrapolación de Richardson). "El método FD de orden superior" utiliza fórmulas con un error proporcional a la cuarta potencia de la distancia nodal; pero en el contorno, deben utilizarse expresiones hacia adelante o atrás de FD, con lo cual disminuye la exactitud y aumenta el trabajo numérico (no se puede utilizar la extrapolación de Richardson). Por último, la exactitud se puede mejorar sin aumentar el número de puntos nodales, a través del empleo del "método FD hermítico" (en inglés: Hermitian FD procedure; en francés: "methode plurilocale"; en alemán: "Mehrstellenverfahren"); siendo el error proporcional a la cuarta potencia del intervalo nodal. La esencia de la formulación descansa en la utilización de la propia ecuación diferencial, además de las relaciones entre funciones y sus derivadas en cada punto. La convergencia del método FD hermítico no es necesariamente monótona, por lo tanto la extrapolación de Richardson puede no ser aplicable. Un caso especial del procedimiento es el llamado "método de las líneas", consistente en la separación de variables en la ecuación diferencial, de tal modo que estas ecuaciones se satisfacen simultáneamente a lo largo de varias (normalmente tres) líneas. El método FD hermítico es conocido, también, en la literatura técnica con el nombre de "método del polígono funicular".

#### 3.3.4. Método de diferencias finitas en energía<sup>24</sup>

Este método es un procedimiento numérico que pertenece a la categoría de los métodos variacionales, en el que se utiliza el principio variacional de mínima energía potencial total del sistema. Todas las variables que intervienen en el cálculo se discretizan a través de la introducción de apropiadas expresiones de FD. En la evaluación de la energía total de deformación, y de la potencial dada por el trabajo de las fuerzas exteriores, la integración se sustituye por un sumatorio. Una vez se ha obtenido la expresión de la energía potencia total del

sistema en términos de los desplazamientos nodales, se extremiza con respecto a estos desplazamientos incógnitas, obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicas. El método es aplicable tanto en el caso de problemas lineales como de no lineales. A pesar de que el método FD en energía se desarrollase antes de la llegada de los ordenadores, tiene una vasta aplicación en las soluciones orientadas a éstos. Dos programas de ordenador, el BOSOR y el STAGS, este último particularmente potente y general, se basan en el método FD en energía; a los cuales, también, se hace referencia en el párrafo 3.3.6.

### 3.3.5. Método de los elementos finitos<sup>25</sup>

El método de los elementos finitos (FEM) es un procedimiento de discretización en el cual la estructura se divide en un número finito de elementos componentes unidos en un número finito de nodos y que actúan bajo un sistema de cargas equivalente a la carga original. El modo en que cada elemento se deforma y transmite las cargas, es decir, sus propiedades elásticas, se supone conocido. Este método es un caso típico de los procedimientos dirigidos a ordenadores digitales; de sus variantes la de los desplazamientos es la más utilizada. En ella las propiedades elásticas de cada elemento finito se define por medio de su matriz de rigidez. En este caso el poder del método de los elementos finitos se basa en su generalidad, en que exactamente el mismo procedimiento que usa el mismo programa de ordenador puede ser utilizado para el análisis de estructuras de cualquier tipo y geometría, sometidas a cualquier condición de carga.

En el caso de estructuras compuestas por elementos finitos simples, tales como la lámina entramado que consiste en elementos unidimensionales tipo viga, las propiedades elásticas de los elementos se conocen exactamente (dentro de la exactitud que nos proporciona la teoría de vigas), y la solución final por el método de los elementos finitos es la misma que la obtenida por el procedimiento clásico. En el caso general de láminas, las propiedades elásticas de los elementos considerados como partes de la lámina son muy difíciles de definir, por ello se utiliza una simplificación. El procedimiento normal es suponer un modo de deformación para cada elemento, y deducir en base a este modelo las propiedades elásticas del elemento. En tal sentido, el método de los elementos finitos puede considerarse como un caso particular del método variacional de Ritz.

Son varias las fuentes de error existentes en el método de los elementos finitos cuando se aplica al análisis laminar, aparte de las simplificaciones introducidas por la propia teoría de láminas: las propiedades elásticas de los elementos son aproximadas, así como lo es la geometría utilizada por el método (la lámina se aproxima por un ensamblaje de elementos). Intuitivamente, parece lógico suponer que la solución obtenida por el método de los elementos finitos converge a la solución "exacta" a medida que disminuye el tamaño de los elementos. Uno de los aspectos principales de la utilización de los procedimientos variacionales en la obtención de las propiedades elásticas de los elementos finitos se basa en el hecho de que, si la condición de mínima energía potencial del sistema se mantiene, el método es monótonamente convergente a la solución exacta al reducir el tamaño de los elementos.

Para satisfacer la condición de energía mínima, el supuesto modelo de desplazamiento del elemento debe satisfacer varias condiciones: se debe mantener la continuidad de desplazamientos y giros entre elementos; el modelo de desplazamientos debe contener los de sólido rígido; y por último, deben estar incluidos los estados de deformación constante. La violación de la continuidad entre los elementos, por sí misma, no implica la pérdida de la convergencia, pero ya no se puede asegurar que ésta sea monótona. Conclusiones similares parecen sostenerse si el movimiento sólido rígido no se mantiene; sin embargo, en cada uno de estos casos la velocidad de convergencia puede disminuir. El hecho de no contener los estados



de deformación constante puede inducir a soluciones erróneas, y la convergencia ir hacia un resultado incorrecto.

La forma del elemento finito varía en función de la naturaleza del problema a resolver (plano o curvado, mono o bidimensional), y las propiedades elásticas asociadas con los estados tensionales de membrana y de flexión pueden estar o no acopladas.

Como se mencionó al principio de este párrafo, el poder de los elementos finitos es, en gran parte, debido a su generalidad ya que una gran variedad de estructuras pueden analizarse usando el mismo procedimiento. Esta característica hace del FEM un procedimiento particularmente apropiado para el análisis de estructuras laminares; puesto que los elementos que representan a la lámina, muro o viga de borde, apoyos, etc., pueden ser introducidos con igual facilidad.

**Elementos monodimensionales:** Como se mencionó anteriormente, los elementos monodimensionales tipo viga se dan en problemas de láminas entramado. Además de que cualquier lámina continua puede representarse de manera aproximada como una malla de elementos monodimensionales, de hecho como una lámina esqueleto. En estos casos, las propiedades elásticas de tales elementos deben ser obtenidas a través de un procedimiento racional basado en las leyes de la mecánica. Aparte de estos casos, muchas láminas pueden ser representadas por elementos unidimensionales; ejemplos de ello son las láminas de revolución y las láminas cilíndricas. Para las superficies cilíndricas los elementos pueden ser planos (un rectángulo, generalmente alargado; este modelo representa exactamente una lámina plegada prismática, y aproximadamente una lámina cilíndrica de sección curva), o bien curvados. Los elementos existentes en la literatura, base de los programas de ordenador disponibles, son segmentos de cilindros circulares, con la matriz de rigidez de una lámina rebajada simplemente apoyada en sus extremos. Existen actualmente programas de computador basados en esta técnica. Para las láminas de revolución los elementos de simple curvatura son los correspondientes a troncos de cono, y los de doble curvatura a bandas de láminas de revolución tales que la geometría de la lámina se conserva en su totalidad, incluyendo las curvaturas en los puntos nodales; en cada caso la matriz de rigidez se basa en la lámina prototipo. Existen en la literatura especializada programas de ordenador basados en este modelo.

**Elementos bidimensionales:** Estos elementos se pueden utilizar en láminas de cualquier geometría. Como en el caso de elementos monodimensionales, los hay planos (triángulos, cuadriláteros, etc.) y curvados; los elementos isoparamétricos, utilizables para el análisis de láminas moderadamente gruesas, y muchos otros tipos, basados en diferentes representaciones funcionales de los desplazamientos, existen en la literatura especializada. En general, a medida que aumenta el orden del elemento, es decir, el número de grados de libertad asociados a cada elemento, aumenta el tamaño de la matriz de rigidez de la estructura. Normalmente para los problemas laminares que se presentan en construcción, los elementos planos cuadriláteros, con veinte grados de libertad por elemento, ofrecen suficiente exactitud, convergencia y un costo de ordenador razonablemente bajo.

### 3.3.6. *Programas de ordenador\**

Existen implementados en ordenadores comerciales de fácil acceso, diferentes programas capaces de analizar complejas estructuras laminares. Están basados, normalmente, en el método de elementos finitos, pero también los hay deducidos a partir del método de diferencias finitas en energía y de los procedimientos clásicos de integración numérica, fundamentalmente en relación con el análisis de láminas de revolución. Algunos de estos programas son ANSYS (Swansons Analysis System, Inc.), ASKA (University of Stuttgart), BOSOR 4 (Lockheed Missiles and Space Company), EASE 2 (Engineering Analysis Corporation), ELAS (Duc-

\* Ver párrafo 6.3.7 para algunas referencias de programas de ordenador.



ke University), MARC (MARC Analysis Research Corporation), NASTRAN (University of Georgia), SAP IV y NONSAP (University of California, Berkeley), STAGS (Lockheed Research Laboratories), y STRUDL II (ICES User's Group).

Tanto los programas como los lenguajes están sometidos a cambios tan rápidos como los del equipamiento disponible, tanto de la Unidad Central de Proceso (Central Processor Unit, CPU), como de los periféricos. Por esta razón, el usuario debe estar muy familiarizado con cada programa y lenguaje a emplear, con su capacidad y limitaciones, y con las limitaciones del método de análisis y de la teoría en que se basa el programa. La importancia de tal familiaridad no puede ser suficientemente ponderada.

### 3.4. Comportamiento no lineal de las láminas

#### 3.4.1. Recomendaciones generales

Como se dijo en el párrafo 3.2., el proyecto de láminas de hormigón se basa normalmente en un cálculo elástico lineal en el que la estructura se supone no fisurada, homogénea, isotrópica, elástica lineal y sujeta a pequeñas deformaciones. Las propiedades del material y sección utilizadas en el cálculo se basan en las secciones brutas sin fisurar, despreciando los efectos de las armaduras. Las fuerzas y momentos internos hallados por este procedimiento, se utilizan, entonces, para determinar las dimensiones necesarias del hormigón y de las armaduras, tanto para la lámina como para sus elementos auxiliares. Esta aproximación es satisfactoria para la mayoría de los problemas de diseño.

En algunos casos, no obstante, el comportamiento de la lámina puede ser descrito con suficiente aproximación, solamente, con un modelo sofisticado, basado en las propiedades específicas del material, o en el comportamiento no lineal de la lámina<sup>26</sup>.

El problema de la anisotropía es fundamentalmente el mismo que el de otras estructuras de hormigón armado. A continuación, se estudiará brevemente el problema de la no linealidad.

#### 3.4.2. No linealidades en láminas

La no linealidad del modelo matemático que describe el comportamiento de la lámina de hormigón armado puede provenir principalmente de dos fuentes: la no linealidad del material o de la geometría.

*No linealidad del material:* En este caso, el comportamiento no lineal es debido a la fisuración del hormigón, a la no linealidad de las relaciones tensión-deformación del hormigón, acero, adherencia y áridos o a efectos dependientes del tiempo tales como fluencia, retracción, temperatura e historia de las cargas. Recientes análisis no lineales han incorporado, con ayuda del método de elementos finitos, algunos de estos efectos para definir la respuesta y propagación de la fisuración de una lámina de hormigón armado en régimen elástico, inelástico y estados últimos. Se han utilizado dos vías diferentes de modelación del material; la primera se basa en una relación empírica, con cambio de las supuestas rigideces de flexión y axil en todo el espesor de la lámina para distintos niveles de carga y fisuración. La segunda consiste en dividir el espesor de la lámina en varias capas de hormigón y de armadura, de forma que el estado tensional en cada capa puede ser seguido en todo el historial de cargas, compatible con la fisuración del hormigón, la relajación del acero, la fluencia, retracción y cambios de temperatura. En ambos métodos, el cálculo se lleva a cabo por división de la carga en un número finito de incrementos. Para cada incremento de carga se itera hasta que el equilibrio

y las relaciones constitutivas se satisfacen dentro de unos límites preestablecidos de acuerdo al estado que se considera del material y fisuración. Los análisis de este tipo sólo son útiles, en la actualidad, fundamentalmente, para investigación, pues el tiempo de ordenador requerido es muchísimo mayor que el precisado para el cálculo usual lineal empleado en proyecto.

*No linealidades geométricas:* El comportamiento no lineal es debido a los grandes desplazamientos, a las grandes deformaciones y cambios de curvatura de la superficie media. Los recientes adelantos en métodos numéricos para ordenador hacen posible una evaluación de estos efectos.

### 3.5. Análisis de la estabilidad

#### 3.5.1. Recomendaciones generales

El análisis de estabilidad de un sistema estructural tradicional consiste en la determinación del menor valor de la carga aplicada para la cual se produce el pandeo. Este análisis está basado en la teoría de pandeo lineal con pequeños desplazamientos. En algunos tipos de láminas este cálculo no es suficiente porque el comportamiento posterior al pandeo influye notablemente en la magnitud de la carga de pandeo, efecto que con la teoría de pequeños desplazamientos no es posible predecir.

A medida que se deforma la lámina, aumentan con la carga las fuerzas principales en su plano. Si una de las fuerzas principales es de tracción, tiende a restablecer la posición original de la lámina, lo cual, generalmente, capacita a la lámina para resistir cargas en el rango del pospandeo mayores a las que predice la teoría lineal en pequeños desplazamientos. Sin embargo, si las dos fuerzas principales en su plano son de compresión, tienden a aumentar la deformación de la lámina; y la carga soportable por la lámina en la fase de pospandeo es menor que la carga de pandeo definida por la teoría lineal. En la figura 3.1, estos dos tipos de comportamiento se muestran de manera cualitativa.

Por lo tanto, el primer paso en el análisis de estabilidad de una lámina es calcular la carga inicial de pandeo (o carga crítica) definida por la teoría lineal de pequeños desplazamientos; a continuación, esta carga crítica se varía según lo requiera la geometría, los apoyos, la carga actuante sobre la lámina, y el correspondiente tipo de respuesta de la lámina. La modificación básica introduce en el cálculo la influencia de los grandes desplazamientos en la magnitud de la carga de pandeo.

Además, se pueden introducir modificaciones, para tener en cuenta las propiedades del hormigón, el efecto de la armadura y la diferencia entre la geometría laminar construida y la idealizada<sup>27</sup>.

#### 3.5.2. Caso 1: Comportamiento pospandeo no determinante

En el caso de que el comportamiento pospandeo no sea determinante, la carga de pandeo puede calcularse por medio de la teoría lineal de pequeños desplazamientos, en la que la lámina se supone que posee una geometría idealizada. Las propiedades del material y secciones se basan en un hormigón no fisurado y sin armaduras. El valor de esta carga crítica idealizada,  $p_{cr}^{lin}$ , se puede obtener para varios tipos de lámina y cargas en la literatura especializada.

No es necesario modificar la carga crítica lineal para tener en cuenta las imperfecciones de la geometría de la lámina construida. Sin embargo, sí debe ser modificada la carga crítica lineal para tener en cuenta otros efectos como se describe en el párrafo 3.5.4.



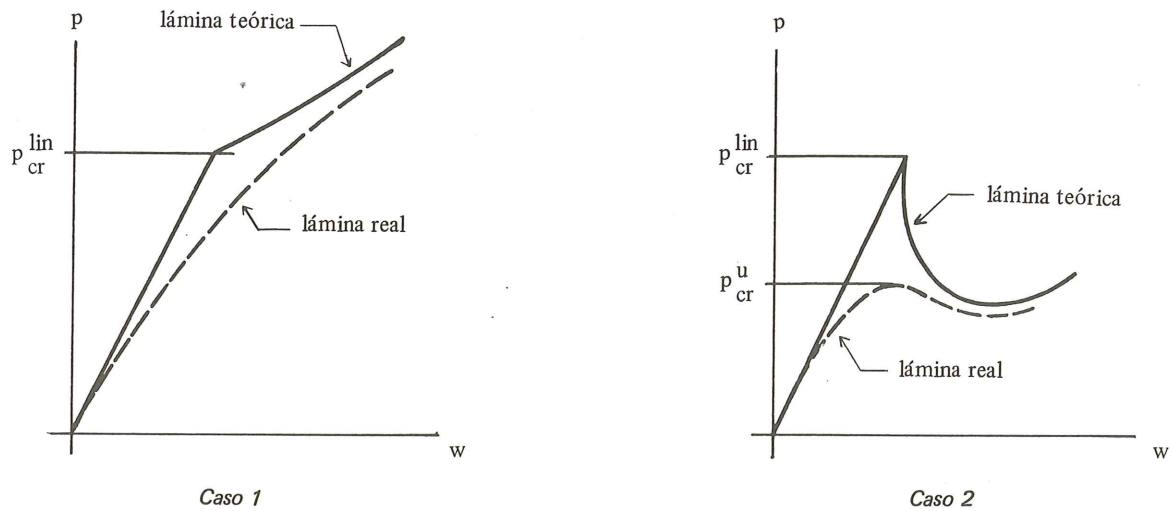


Fig. 3.1. Comportamiento laminar en el pospandeo

La carga lineal de pandeo debe utilizarse solamente cuando, en base a estudios analíticos o experimentales, se conozca positivamente que el valor inicial de la carga de pandeo no desciende en la zona pospandeo.

### 3.5.3. Caso 2: Comportamiento pospandeo determinante

Esta aproximación del análisis de estabilidad debe utilizarse cuando se sepa que la carga inicial de pandeo decrece, o bien cuando no exista suficiente evidencia de lo contrario.

La carga de pandeo lineal,  $p_{cr}^{lin}$ , se usa como punto de partida, teniendo en cuenta el efecto de las grandes deformaciones tal como sigue: se calcula la flecha,  $w'_0$ , de la lámina (o se evalúa por otros medios, por ejemplo a través de resultados experimentales). A continuación, se calcula el cociente de la flecha respecto al espesor,  $w'_0/h$ , y se obtiene a partir de la Figura 3.2 el valor deducido de la carga supercrítica,  $p_{cr}^u$ . Gráficos similares al de la Figura 3.2 se pueden encontrar en la literatura especializada para diversos tipos de geometrías laminares y configuraciones de carga. Se recomienda que, en ausencia de más información se utilice la curva inferior de la Figura 3.2 (por ejemplo, la curva aplicable a un cilindro bajo carga axial de compresión).

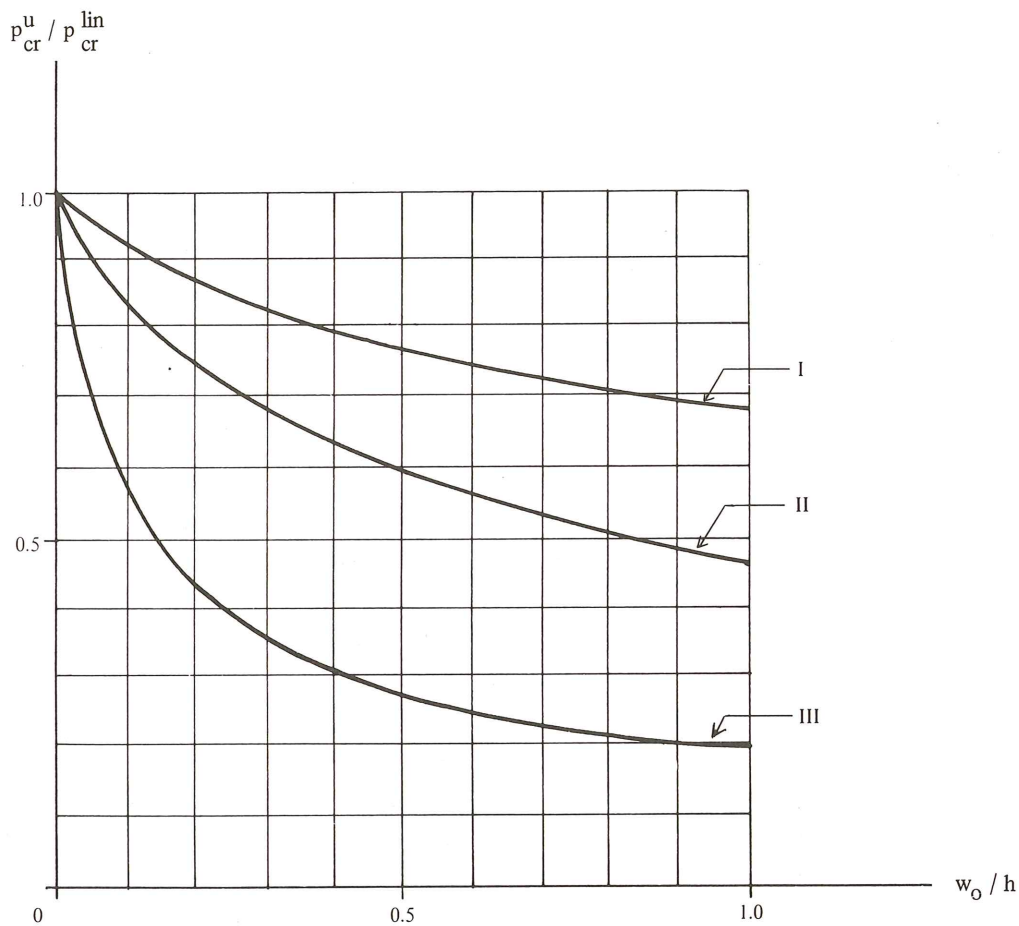
### 3.5.4. Modificaciones por geometría y material

*Imperfecciones geométricas:* En general, la geometría de la lámina construida difiere de la forma idealizada del proyecto. En las zonas donde la lámina presenta menor curvatura que en el proyecto, las fuerzas en su plano son mayores que las calculadas. Por lo tanto, para aquellas láminas en las que es importante el efecto pospandeo, se reducirá el valor inicial de la carga de pandeo. La carga reducida de pandeo puede evaluarse por un cálculo previo, o suponer la desviación,  $w''_0$ , entre las superficies de las láminas de proyecto y construcción y proceder como si fuera una flecha de la lámina. Se forma de nuevo el cociente  $w''_0/h$  y la Figura 3.2 permite obtener el valor reducido de la carga de pandeo. Como en el caso anterior, a falta de información específica respecto a la lámina del problema, se debe utilizar la curva inferior de la figura. Nótese que debido a la no linealidad de la naturaleza del problema, si estuviesen presentes los términos  $w'_0$  y  $w''_0$  simultáneamente, el procedimiento de reducción se debe llevar a cabo al mismo tiempo.

*Efecto de la fluencia:* El efecto de la fluencia puede evaluarse por reducción del módulo de elasticidad,  $E_c$ , del hormigón de acuerdo con la siguiente fórmula

$$E_{cr} = \frac{E_c}{(1 + C_u)} ; C_u = 4 - 2 \log f_c \quad (3.7)$$

donde  $E_{cr}$  es el módulo de elasticidad reducido (debido a la fluencia) del hormigón, y  $f_c$  es la resistencia del hormigón en el momento de carga, medido en  $N/mm^2$ . El valor previamente calculado de la carga supercrítica,  $p_{cr}^u$ , debe ser disminuido en la misma proporción que  $E_c$ , pues éste aparece en la fórmula de la carga crítica lineal,  $p_{cr}$ , como primera potencia. La reducción anterior presupone que la carga actuante es una carga de larga duración; si alguna de las cargas fuese de pequeña duración, tales como, la carga de viento o carga sísmica, el módulo de elasticidad,  $E_c$ , se deberá minorar solamente de forma parcial, proporcionalmente a la relación entre las cargas de pequeña duración y las cargas totales.

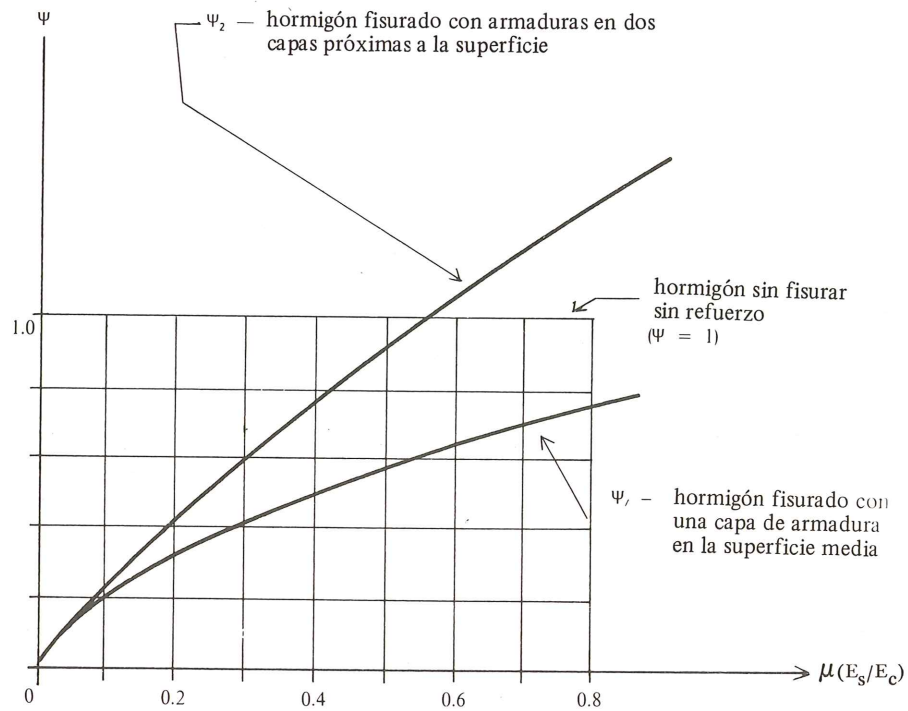


Nomenclatura: I., - longitud del cilindro  
R., - radio del cilindro  
h., - espesor de la lámina

Curvas: I - cilindro largo ( $l^2 / Rh = 1000$ ) comprimido anularmente  
II - cilindro corto ( $l^2 / Rh = 100$ ) comprimido anularmente  
III - esfera sometida a presión radial, y cilindro comprimido axialmente

Fig. 3.2. Carga supercrítica  $p_{cr}^u$  (según Kollar y Dulacska<sup>27</sup>)





$\psi$  - coeficiente; entrar en la Fig. 3.3 con el valor  $\mu(E_s/E_c)$ , conocidas la situación de las armaduras y el estado de fisuración.  
 $\mu$  - cociente del área de las armaduras en una dirección respecto al área de hormigón.

Fig. 3.3. Valores del coeficiente  $\psi$  (según Kollar y Dulacska<sup>27</sup>)

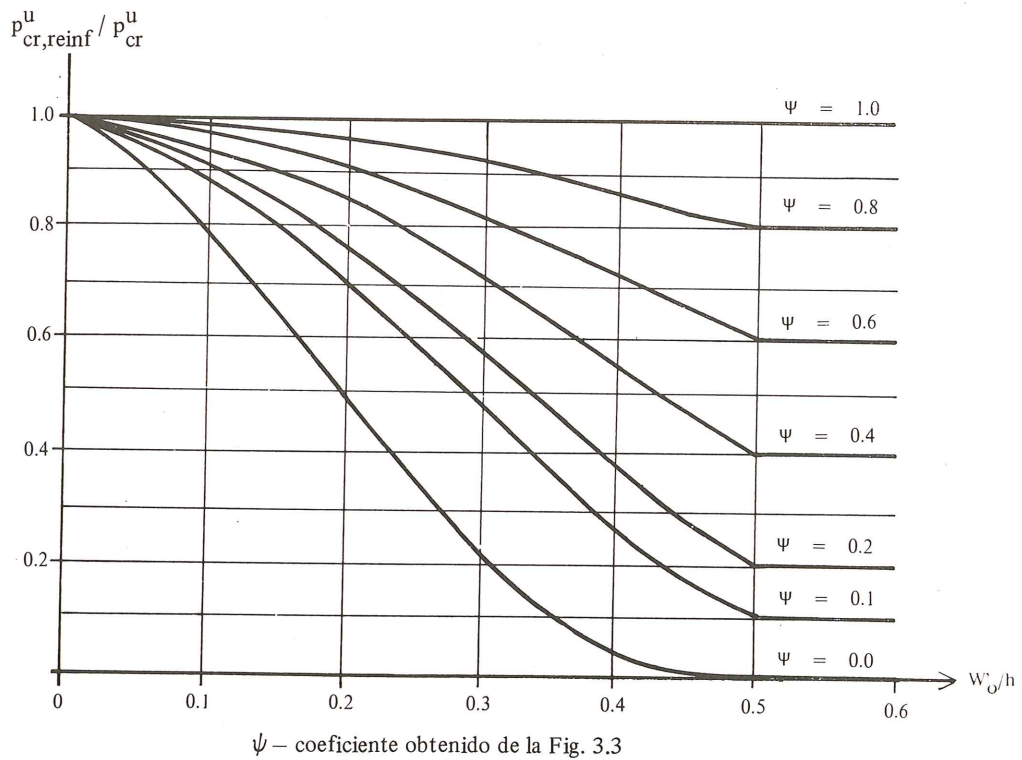


Fig. 3.4. Modificación de la carga supercrítica debida a las armaduras y a la fisuración (según Kollar y Dulacska<sup>27</sup>)

*Efectos de las armaduras y de la fisuración:* Estos efectos pueden tenerse en cuenta como sigue: Calculada la expresión  $(E_s/E_{cr}) \cdot (A_s/A_c)$ , donde la sección del acero  $A_s$  se toma en una sola dirección, de la figura 3.3 se obtiene el valor del coeficiente  $\psi$  adecuado al orden de magnitud de las tensiones y a la disposición de armaduras. Entonces, se puede obtener de la Figura 3.4 el valor de la carga supercrítica,  $p_{cr, reinf}^u$ , en función de  $\psi$ ,  $y$ , de la razón  $w_o/h$ , donde  $h$  es el espesor de la lámina, y,  $w_o$  es la suma de las dos flechas  $w_o'$ , y  $w_o''$ , anteriormente definidas.

*Efectos de la plasticidad del hormigón:* Hasta el momento, se ha considerado que el material de que está constituida la lámina es elástico. No obstante, las propiedades plásticas del material pueden ser tomadas en cuenta con ayuda de la fórmula interactiva "semi-cuadrática de Dunkerley".

$$\left[ \frac{p_{cr}^{plast}}{p_{plast}} \right]^2 + \left[ \frac{p_{cr}^{plast}}{p_{cr, reinf}^u} \right] = 1 \quad (3.8)$$

a través de la cual se puede calcular la carga crítica,  $p_{cr}^{plast}$ , de la lámina plástica. En la ecuación (3.8),  $p_{plast}$  indica la carga que la lámina puede soportar con una excentricidad  $w_o'$  de las fuerzas de compresión en su plano (sin tener en cuenta el pandeo), con ambos, hormigón y armaduras, en el punto de relajación. Se recomienda que para el cálculo de  $p_{plast}$  se reduzca el espesor de la lámina en un centímetro, aproximadamente, para espesores menores de ocho centímetros, como forma de tener en cuenta las posibles imperfecciones y debilidades de la sección transversal. El cálculo anterior no incluye el efecto de las imperfecciones  $w_o''$ , pues se puede suponer que éstos están solamente relacionados con las fuerzas en su plano, y además, la ecuación (3.8) proporciona resultados conservadores comparados con los valores de la fórmula cuadrática que es más exacta.

### 3.5.5. Coeficiente de seguridad

El coeficiente de seguridad FS, se define a través de la fórmula

$$FS = \frac{p_{cr}^{plast}}{p} \quad (3.9)$$

donde  $p$  es la carga real. En el caso de láminas cuya carga crítica aumenta durante el pospandeo (párrafo 3.5.2), el valor del coeficiente de seguridad puede tomarse igual a 1,75, el mismo que se usa en el caso de columnas de hormigón armado, puesto que en ambos casos el fallo se producirá por colapso plástico. En el caso de láminas con efecto pospandeo determinante (párrafo 3.5.3), el valor del coeficiente de seguridad se tomará como mínimo de 3,5.

### 3.5.6. Análisis experimental de la estabilidad

Las cargas de pandeo se pueden obtener experimentalmente por medio de modelos de microhormigón, tal como se expone en el párrafo 3.6.

## 3.6. Análisis experimental

### 3.6.1. Recomendaciones generales

Como se indicó en el párrafo 3.1, el análisis experimental, por sí mismo, no debe utilizarse como base para el proyecto de láminas; es útil para confirmar la validez del modelo matemático, de los resultados de cálculo, y para ayudar a comprender cualitativamente el comportamiento de la lámina y la importancia relativa de determinados influjos.



### 3.6.2. Tipos de análisis experimental

En función de los diversos criterios de clasificación, se pueden distinguir diferentes tipos de análisis experimental.

*Naturaleza de la estructura ensayada:* Análisis de un modelo o del prototipo.

*Objetivo del análisis experimental:* Ensayo de un modelo simulando un prototipo, o un modelo matemático.

*Naturaleza del modelo:* Elástico o inelástico; cumpliendo (“análisis experimental directo”) o no (“análisis experimental indirecto”) las leyes de semejanza; modelos a pequeña o gran escala.

*Naturaleza de la carga:* Las cargas pueden ser estáticas, dinámicas, térmicas, de viento, etc.

*Naturaleza del comportamiento laminar a analizar:* Carga de trabajo o de rotura; grandes o pequeñas deformaciones; estabilidad; efectos especiales.

### 3.6.3. Etapas del análisis experimental

Independientemente de la finalidad o tipo, se deben distinguir tres fases en el análisis experimental.

*Diseño del experimento:* En esta fase se toman las decisiones en base a la naturaleza y tamaño del modelo, la naturaleza y magnitud de las cargas aplicadas, y la instrumentación necesaria.

*Ensayo:* Se observa el comportamiento del modelo bajo las cargas y se recogen los resultados.

*Interpretación:* Se analizan e interpretan los datos, se extraen conclusiones y se dan recomendaciones para el proyecto.

### 3.6.4. Leyes de semejanza

En el caso de análisis experimental directo (suponiendo independencia respecto al tiempo), se deben respetar las siguientes leyes de semejanza.

*Semejanza geométrica:* Todas las dimensiones del modelo se obtienen multiplicando por un factor de escala apropiado y constante a las correspondientes dimensiones del prototipo.

*Semejanza de materiales:* La curva de tensión-deformación del material del modelo, en el rango de cargas a investigar, debe ser la misma que la del prototipo.

*Semejanza de cargas:* La magnitud, el punto de aplicación y la dirección de las cargas en el modelo se obtienen utilizando un factor de escala adecuado a las cargas del prototipo.

En el caso de análisis experimental que incluya efectos dependientes de tiempo, la “escala de tiempo” debe basarse en las leyes generales de semejanza (“teorema de Buckingham-Pi”).

### 3.6.5. Análisis elástico

Si tanto los materiales del modelo como del prototipo son linealmente elásticos, homogéneos e isotrópicos, las leyes de semejanza del material se satisfarán si el coeficiente de Poisson de ambos materiales es el mismo. No obstante, puesto que el efecto del coeficiente de Poisson en el comportamiento de las láminas de hormigón se supone normalmente pequeño, esta condición es frecuentemente despreciada permitiendo de esta forma el uso de metales y plásticos para simular el hormigón. Se debe tener en cuenta este efecto cuando sus consecuencias pueden ser importantes. Los metales, debido a sus altos módulos de elasticidad exigen la aplicación de cargas elevadas para obtener deformaciones medibles. Por esta razón se prefiere el aluminio al acero.

Los plásticos, tanto termoestables como termoplásticos, son los materiales utilizados con mayor frecuencia. Entre sus inconvenientes se incluyen el gran coeficiente de Poisson, el hecho de que el comportamiento sea dependiente del tiempo, la introducción de tensiones residuales durante la construcción del modelo, las alteraciones en las medidas debidas a rigidizaciones locales asociadas a los medidores metálicos, y los "puntos calientes" producidos por la baja conductividad térmica de los plásticos en las lecturas de los medidores de resistencia eléctrica. Se pueden paliar algunos de estos inconvenientes utilizando técnicas especiales, descritas en la literatura al respecto.

También, es posible estudiar la no linealidad geométrica debida a grandes desplazamientos con modelos elásticos adecuados hechos de metal o plástico. Con éstos es factible estudiar las cuestiones más interesantes del pandeo o del comportamiento pospandéo, pero debe tenerse mucho cuidado en su elaboración reproduciendo correctamente las condiciones de contorno del prototipo.

La importancia de los ensayos elásticos en modelo han disminuido considerablemente, con el desarrollo de los sofisticados métodos numéricos para el ordenador, tales como el método de los elementos finitos, con los que se puede llevar a cabo análisis elásticos de complejas estructuras laminares.

### 3.6.6. Análisis inelástico y estados últimos

El análisis experimental para el estudio del comportamiento de una lámina de hormigón armado bajo regímenes elástico, inelástico y estados últimos requiere modelos más complejos que los empleados únicamente para el análisis elástico. Tanto el hormigón como el acero de las armaduras deben ser simulados en el modelo con materiales apropiados no lineales que posean propiedades similares a las del prototipo en todos los estados a estudiar, desde el régimen elástico hasta la rotura.

En general, es difícil simular todas las propiedades del hormigón del prototipo, utilizándose, en ocasiones, una mezcla de yeso, diatomeas y agua.

*Microhormigón:* El material más adecuado parece ser el microhormigón; pero, de todos modos existen cierto tipo de dificultades: la reducción de todos los materiales a escala es imposible, pues no se dispone de cemento de menor tamaño de grano, y además, la mezcla del modelo necesita mayor proporción de agua. El material del modelo es una mezcla de cemento, áridos y agua, estando fijado el tamaño máximo del árido por el espesor de la lámina, y por la distancia entre armaduras del modelo. Normalmente, las propiedades más importantes del material son la resistencia a compresión ( $f_c$ ), la resistencia a tracción, el módulo de Poisson, el módulo de elasticidad secante, la deformación máxima a compresión, las características de retracción y de fluencia, y su manejabilidad.



Otras dificultades al trabajar con microhormigón son que la resistencia a tracción aumenta al disminuir el tamaño del árido, la cual puede influir en la magnitud, y en la extensión de la fisuración apreciable para un determinado tipo de cargas; que la mayor proporción de agua de la mezcla aumenta la retracción; y que algunas otras características del hormigón dependen del tamaño de la muestra analizada, por ello se recomienda que el tamaño de la muestra sea función del tamaño del modelo.

Las armaduras del microhormigón presentan problemas en la simulación de las del prototipo: la forma de las curvas de tensión-deformación deben ser las mismas; las características de adherencia son difíciles de reproducir, así como, el tipo de fisuración del hormigón.

En general, los modelos de microhormigón exigen ser mayores que los modelos elásticos hechos a base de plástico o metales.

A pesar de sus inconvenientes, el análisis con modelos de microhormigón es el único método disponible, en la actualidad, capaz de representar el comportamiento de una lámina de hormigón armado en los estados elástico, inelástico y de rotura. El uso de modelos de microhormigón debe ser considerado, junto al cálculo matemático, como una ayuda en el proyecto de grandes e importantes estructuras laminares de hormigón armado.

### *3.6.7. Cargas y apoyos*

Los sistemas de carga deben diseñarse para permitir que las cargas alcancen la situación de rotura, así como los apoyos necesitan proyectarse dotándolos de una rigidez mucho mayor que la del modelo.

## **3.7. Análisis de los elementos auxiliares**

### *3.7.1. Elementos de apoyo*

Los elementos de apoyo deben ser proyectados de acuerdo a la normativa existente para satisfacer las necesidades de resistencia y las condiciones de servicio.

Estos elementos de apoyo deben calcularse para distintos tipos de carga parcial, teniendo presente la excentricidad del elemento respecto a la lámina, y la participación de una parte de la lámina en la acción del apoyo, tal como se expone en los Capítulos 2 y 4 de estas Recomendaciones.

### *3.7.2. Elementos de borde y rigidizadores*

Estos elementos forman parte de la estructura laminar y deben ser analizados en conjunto con aquélla. Un procedimiento usual para introducir el efecto de los rigidizadores en el cálculo de la lámina es considerar a ésta con unas nuevas características de deformación axil y flexión equivalentes a las de la lámina original, pero uniformemente distribuidas en su superficie media. Este método suele conocerse por "remodelado".

## CAPITULO 4. DIMENSIONAMIENTO Y EXIGENCIAS DE PROYECTO

### 4.1. Consideraciones generales

Además de las exigencias resistentes varios factores influyen en la determinación de las dimensiones del hormigón, y de la cuantía y separación de las armaduras en la lámina y elementos auxiliares. Estos factores incluyen la necesidad de limitar la fisuración, la colocación y recubrimiento de las armaduras, disposición de las armaduras, conexiones y anclajes de las barras, y el proyecto general y de detalles del pretensado.

Los comentarios contenidos en este Capítulo correspondientes al dimensionado y proyecto de láminas de hormigón son aplicables, en general, a todo tipo de láminas.

### 4.2. Hormigón de la lámina

#### 4.2.1. Espesor de la lámina

En muchos casos el espesor de la lámina viene impuesto, no por exigencias resistentes, sino por otros factores del proceso de construcción y del funcionamiento de la lámina. Estos incluyen la calidad de construcción que se puede alcanzar con un proyecto dado, los requisitos de colocación y recubrimiento de las armaduras, los condicionantes de la estabilidad de la estructura, y la posibilidad de limitar las deformaciones, tanto en la estructura como en sus elementos auxiliares.

A pesar de que se hayan construido láminas de 25 mm de espesor, el rango más frecuente es de 50 mm a 100 mm. Este espesor permite una colocación razonablemente sencilla de las armaduras y del hormigón, y un adecuado recubrimiento de las armaduras.

En algunas zonas de la lámina próximas a los bordes y a los apoyos, puede ser necesario un mayor espesor de hormigón de modo que sea factible colocar mayor cantidad de armaduras, particularmente para resistir la flexión. La experiencia muestra que el grosor de la lámina en estas zonas puede alcanzar el doble o incluso el triple del espesor normal. Este aumento de espesor, donde ocurra, debe alcanzarse de forma gradual, con una transición suave, para evitar la concentración y redistribución de tensiones. La zona de transición debe ser por lo menos cinco o, si fuera posible, hasta diez veces el espesor adicional de la lámina.

#### 4.2.2. Recubrimiento de las armaduras

La determinación del recubrimiento de las armaduras, exige un equilibrio entre la protección de éstas de las inclemencias ambientales y de antiestéticas oxidaciones, por una parte, y el deseo de situar las barras tan próximas como sea posible a la superficie de la lámina, por otra, reduciendo al mismo tiempo la anchura de las inevitables fisuras superficiales. Basándose en estas consideraciones, se recomiendan los siguientes recubrimientos mínimos.

*Elementos de borde y apoyos:* El recubrimiento mínimo será el de la normativa existente para la construcción típica de hormigón, exceptuando las armaduras de la lámina que puedan continuar en tales elementos, que como mínimo tendrán un recubrimiento igual al que gozan en la lámina propiamente dicha.

*Elementos rigidizadores:* Utilizar el mismo recubrimiento que en las armaduras de la lámina propiamente dicha.

*Lámina:* Para superficies laminares protegidas de la intemperie, atmósferas agresivas, o contacto con el suelo, usar los recubrimientos mínimos indicados en la Tabla 4.1.



Para superficies laminares sometidas a la intemperie, ambientes agresivos o en contacto con el suelo, es necesario un recubrimiento adicional de las barras, función de la situación de la superficie (interior o exterior) y del grado de exposición. Además, debe aumentarse el recubrimiento mínimo allí donde la lámina sea pisada, o donde no se utilice encofrado por ambas caras, en este caso, el recubrimiento mínimo no debe ser menor que el tamaño máximo del árido, ni menor que el diámetro de las barras.

La protección al fuego requiere ser más exigente en cuanto al recubrimiento mínimo de las armaduras, tales precauciones adicionales son sólo necesarias con las armaduras principales, y con las barras de flexión donde su relajación puede producir la ruina estructural.

### 4.3. Armaduras de la lámina

#### 4.3.1. Consideraciones generales

El proyecto y detalle de las armaduras exige especial consideración de un número de factores pertenecientes no sólo al cálculo, si no, también, a la construcción. Muchos de estos requisitos son comunes a todo tipo de sistemas estructurales, y solamente algunos son específicos de láminas. Los siguientes comentarios resumen la práctica actual de los proyectistas experimentados de láminas.

*Tipos de armaduras:* Se diferencian tres tipos de armaduras para láminas: de membrana, de flexión, y especiales tales como las del contorno y agujeros de la lámina; disponiéndose normalmente en varias capas. Las de membrana se sitúan generalmente en dos capas ortogonales cercanas a la superficie media (superficie equidistante de ambos paramentos). Las de flexión se colocan casi siempre próximas a los paramentos de la lámina.

*Tamaño de las barras:* En general, para reducir la anchura de la fisuración, se emplean barras de pequeños diámetros (preferentemente barras corrugadas, excepto en el caso de mallas soldadas). La separación entre armaduras debe recibir consideración especial; si bien se acepta que incluso la colocación de redondos poco espaciados no evitará la aparición de microfisuras menores de 0,2 mm de anchura; sin embargo, tales grietas pueden considerarse insignificantes.

*Barras de alta resistencia:* Como regla, se debe evitar el uso de barras de alta resistencia (por ejemplo, con escalón de relajación,  $f_y$ , mayor de 280 N/mm<sup>2</sup>), a causa del aumento de las deformaciones de tracción y de la fisuración. Si se utilizan armaduras de alta resistencia es necesario estudiar con detenimiento los posibles efectos en la deformación y fisuración, y, debe limitarse la tensión máxima admitida para el acero.

*Distribución de las armaduras:* La distribución de las barras en la lámina debe normalmente ser pareja a la de las tensiones. Esto condiciona una variación relativamente suave de la cantidad de redondos en la lámina y a un error relativamente pequeño con respecto a la hipótesis de distribución uniforme de las características elásticas realizada en el cálculo. No obstante, en algunos casos la concentración de barras en pequeñas zonas de la lámina puede ser beneficiosa, como se comenta con detalle en la sección 4.3.2. siguiente.

#### 4.3.2. Armaduras de membrana

Las armaduras de membrana deben resistir todas las tracciones de membrana calculadas en la lámina, no permitiéndose ninguna participación del hormigón.

En principio se pueden calcular las tensiones principales y sus direcciones, y entonces, colocar las armaduras a lo largo de las líneas principales de tracción. En la práctica este mé-

todo es poco útil, puesto que, la dirección de las tensiones principales varía en función del sistema de cargas, además de que la geometría de la superficie laminar puede requerir que las armaduras de membrana adopten una forma tridimensional, generalmente difícil de conseguir para barras de gran diámetro. Por estas razones, el método más empleado en el proyecto de armaduras de membrana se basa en dos capas ortogonales de barras situadas en las proximidades de la superficie media de la lámina y orientadas según convenga, siendo tal sistema relativamente fácil de ejecución. En el caso de láminas cilíndricas circulares, por ejemplo, las barras se disponen normalmente siguiendo a las generatrices (líneas rectas), y a las directrices (arcos circulares).

No obstante, en las zonas de la lámina sometidas a grandes esfuerzos de tracción, una norma de "buena práctica" consiste en colocar armaduras de membrana paralelas, o casi paralelas, a las líneas principales de tracción. Esto se lleva a efecto, en muchos casos, por medio de una tercera capa de armaduras de membrana colocándola solamente en las zonas de grandes tensiones.

*Armaduras de membrana mínimas:* Debe consistir en dos capas de barras de direcciones perpendiculares. La mínima sección recta de armaduras por unidad de anchura de la lámina, debe ser la especificada por la normativa existente de esfuerzos térmicos y distribución de armaduras. El diámetro de las barras corrugadas no será menor de 6 mm, y 5 mm el de los alambres de las mallas soldadas para el hormigonado en obra y 4 mm en las láminas prefabricadas. El área mínima de las armaduras en una dirección será 0.20 por 100, y la suma de las áreas de las armaduras en dos direcciones no debe ser menor de 0.60 por 100. En el caso de que el espesor de la lámina supere los 14 cm, se emplearán dos capas de acero.

**TABLA 4.1**  
**Recubrimiento mínimo de las armaduras**

Tipo de construcción	Diámetro de la barra (mm)	Recubrimiento (mm)
Hormigonado en obra	< 16	12,5
	≥ 16	18
Prefabricado	< 16	10
	≥ 16	15
Pretensado (barras, alambres, tendones, vainas, accesorios)	< 16 resto	10 15 pero nunca inferior al diámetro de la barra, alambre, tendón o conductor

*Armadura de membrana máxima:* Se evaluará por la fórmula:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{A_s}{A_c} = 0,6 \frac{f'_c}{f_y} \quad \text{para } f'_c < 28 \text{ N/mm}^2 \\
 &= \frac{16,8}{f_y} \quad \text{para } f'_c \geq 28 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

donde  $A_s/A_c$  es el cociente entre áreas de armaduras y hormigón para una sección determinada de la lámina,  $f'_c$  es la resistencia del hormigón en probeta cilíndrica, y,  $f_y$  es el límite de relajación del acero, medidos ambos en  $\text{N/mm}^2$ . La fórmula (4.1) se aplica en el caso de que las líneas de las armaduras coincidan con las direcciones de tensiones principales; si la desviación es mayor que 10 grados, el área máxima de la armadura debe ser reducida, de la misma forma que la tensión admisible del acero, de acuerdo con la fórmula (4.3).



**TABLA 4.2**  
**Longitudes mínimas de empalme**

Tipo de barra	Longitud de empalme (en diámetros de barra)	Mínimo (mm)
Barra de tracción	45	600
Barra de compresión	30	450
Armaduras no exigidas por el cálculo	24	300
Malla soldada	3 veces el tamaño de la malla	300
Malla soldada no exigida por el cálculo	1 vez el tamaño de la malla	150

*Separación de las armaduras de membrana:* La separación de las barras corrugadas no debe ser mayor de cinco veces el espesor de la lámina, ni mayor de 300 mm. Las barras de las mallas soldadas no deben estar separadas más de cuatro veces el espesor de la lámina, ni más de 200 mm.

Si la tensión principal de tracción calculada para la sección llena de la lámina es superior a la tensión calculada según la fórmula (4.2), las armaduras de membrana estarán separadas como máximo tres veces el espesor de la lámina.

$$\sigma = 7,67 \sqrt{f_c} \text{ (N/mm}^2\text{)} \quad (4.2)$$

donde  $f_c$  es la resistencia del hormigón en probeta cilíndrica medida en N/mm<sup>2</sup>. Esta restricción no es necesario aplicarla en las zonas de la lámina donde exista armadura de flexión en las dos caras, con separación, en ambas direcciones, no superior a tres veces el espesor de la lámina.

*Desviación respecto a las direcciones de tensiones principales:* La armadura de membrana, cuya desviación respecto a las direcciones de tensiones principales sea menor de 10 grados, puede ser proyectada de acuerdo con las tensiones máximas admisibles dadas en el Capítulo 2 de estas Recomendaciones; si la desviación es mayor que 10 grados, las tensiones máximas admisibles deben ser reducidas. El factor de reducción varía en función del ángulo de desviación (el cual puede variar de 10 a 45 grados), y en función del cociente,  $\kappa$  entre las tensiones principales de tracción y compresión, en el punto en estudio de la lámina. Para los casos prácticos más importantes ( $\kappa = -1$ ), el factor de reducción,  $r$ , de tensiones puede tomarse como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Para } \phi \leq 10^\circ; r &= 1,00 \\ \text{Para } 10^\circ < \phi < 30^\circ; r &= 1,30 - 0,03 \phi \\ \text{Para } \phi \geq 30^\circ; r &= 0,40 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de desviación. Para valores del factor de reducción  $r$  donde el valor de  $\kappa$  sea distinto de  $-1$ , se consultarán las referencias de investigación actuales.

No es necesario considerar el efecto de los momentos flectores en la magnitud del ángulo de desviación.

*Concentración de armaduras:* La experiencia muestra que en algunos casos la distribución de armaduras en determinadas secciones no necesita ajustarse a la distribución de tensiones en dichas zonas, tal como se recomienda en 4.3.1. Dos ejemplos pueden citarse, al respecto: en el caso de la lámina cilíndrica con viga de borde, el armado longitudinal que ha de resistir las tensiones totales se sitúa, en ocasiones, concentrado en el cordón in-

ferior de las vigas de borde; análogamente, en el caso de superficies de revolución, la armadura que resiste las tensiones circunferenciales se coloca, a veces, concentrada en la zona del anillo de tracciones.

Se han realizado varios proyectos utilizando esta técnica; no obstante, se recomienda cautela para cerciorarse de que la resistencia última de la lámina sea adecuada. Si se utiliza este procedimiento la relación mínima de áreas de acero y hormigón no debe ser inferior a 0,0035 en ninguna de las zonas de la lámina traccionada.

*4.3.3. Armadura de flexión.* El cálculo de la armadura de flexión se realizará incluyendo toda fuerza axial que pueda actuar conjuntamente con los momentos flectores.

En las zonas de flexión, es necesario colocar las barras tanto en la cara superior como en la inferior, debiendo evitarse el cambio de armaduras de una superficie a otra siguiendo la curva de momentos flectores, pues el punto de cambio de signo del momento puede variar de un sistema a otro de cargas.

El proyecto de las armaduras de flexión debe hacerse de acuerdo con la normativa existente.

Si la lámina presenta una zona de flexión próxima a un elemento de borde o de apoyo, la armadura, determinada normalmente por las exigencias de flexión, puede llegar a estar impuesta por las exigencias de torsión del elemento o borde en cuestión.

#### *4.3.4. Armaduras laminares especiales*

Debe ser estudiada detenidamente cualquier armadura adicional requerida en la zona próxima a los apoyos para una adecuada transferencia de las fuerzas de la lámina a los apoyos.

La armadura de la lámina en la unión de esta con los elementos auxiliares se anclará en estos por medio de una adecuada prolongación, por ganchos o por otro tipo de anclaje, respetando las exigencias de la reglamentación vigente respecto a éstos.

Los bordes de los agujeros de la lámina estarán siempre armados, y cuando sea posible, se emplearán elementos de borde, cuyas armaduras se prolongarán para solaparse con las de la lámina. La cuantía del refuerzo del borde debe ser calculada o, como mínimo, será el doble de la cuantía del refuerzo discontinuado por el agujero. Además, es necesario prestar especial atención a una posible armadura diagonal en las esquinas entrantes, particularmente en zonas de grandes tensiones.

#### *4.3.5. Empalme de armaduras*

Los empalmes de las armaduras se reducirán al mínimo posible. En caso de ser necesarios, deben espaciarse de forma que como máximo se lleven a cabo cada tercera barra en la misma capa y sección, con distancia mínima entre empalmes de barras contiguas igual a 100 veces el diámetro de la mayor. Las barras se empalmarán dentro de la misma capa.

Las longitudes de los empalmes se atenderán a la legislación vigente, pero nunca serán menores a las dadas en la TABLA 4.2. Notese que las medidas de dicha tabla están basadas en barras de acero de punto de relajación igual a  $28 \text{ N/mm}^2$ , debiendo modificarse de forma proporcional para aceros de mayor tensión de fluencia.

Las barras de tracción de membrana de diámetro mayor o igual a 34 mm no deben ser empalmadas, si no soldadas a tope con soldadura de penetración total. Especial atención se



prestará a la conveniencia de un precalentamiento de los redondos, y al uso de electrodos de bajo contenido de hidrógeno para evitar uniones frágiles.

No son necesarios los ganchos en las barras corrugadas, ni en los alambres de las mallas soldadas en taller. Las longitudes de los empalmes dadas en la TABLA 4.2 son para barras corrugadas, debiéndose corregir en el caso de utilizar barras lisas sin ganchos.

#### **4.4. Armadura de los elementos auxiliares**

##### *4.4.1. Armadura*

Los elementos auxiliares se reforzarán de acuerdo con los cálculos y la normativa vigente.

Se estudiará la posibilidad de prolongar las barras de los apoyos o elementos de borde en las zonas próximas de la lámina siguiendo las líneas de tensiones principales.

El armado de las vigas de borde se hará en base a teorías sancionadas por la práctica. Si las barras longitudinales se proyectaran concentradas en la zona de máximas tracciones, se analizará la posibilidad de reforzar longitudinalmente el resto de la viga de borde para reducir la fisuración superficial. Alternativamente, la distribución de armaduras puede proyectarse para seguir la distribución de tensiones calculadas.

##### *4.4.2. Participación de la lámina*

En algunos casos es posible suponer que una porción de lámina actúa como parte de los elementos auxiliares. La anchura de esta zona de participación depende de la geometría de la lámina, y puede ser menor que la anchura del ala de la viga en T especificada por la normativa existente.

#### **4.5. Pretensado**

##### *4.5.1. Pérdidas*

Para la determinación efectiva del pretensado se deben considerar las siguientes pérdidas:

*Pérdidas debidas al hormigón:* Acortamientos elásticos, fluencia y retracción.

*Pérdidas debidas a los cables:* Movimiento de los anclajes, relajación del acero, y pérdidas por rozamiento de los cables en las trayectorias rectas y/o curvas.

##### *4.5.2. Componentes de las tensiones de los cables*

En aquellos casos en que los cables están situados en la lámina delgada propiamente dicha, describen una trayectoria espacial no necesariamente plana, ejerciendo fuerzas en la lámina que pueden separarse según sus componentes; componentes que deben tenerse en cuenta en el cálculo de la lámina.

### 4.5.3. Anclajes

Los anclajes de los cables de pretensado deben ser armados para evitar el exceso de tensiones locales, y asegurar que el anclaje no se desprenda de la lámina en dirección transversal.

En aquellas zonas en que las placas de anclaje descansen en una sección de la lámina delgada, se asegurará que la sección de hormigón para apoyar la placa es suficiente.

## 4.6. Inserciones soldadas

### 4.6.1. Proyecto

En ocasiones, las inserciones soldadas adecuadamente fijadas en el hormigón, se introducen en la lámina o en sus elementos auxiliares para fijar las cargas, o para unir elementos laminares prefabricados. Tales inserciones deben de ser adecuadamente fijadas al hormigón. Tanto las inserciones como sus fijadores se proyectarán para transmitir a la lámina tanto los esfuerzos de membrana como los de flexión que puedan ocasionarse. Así mismo, debe tenerse en cuenta las posibles excentricidades y cargas accidentales que puedan producirse en la construcción o durante la actuación de las cargas de larga duración.

Es necesario estudiar la dirección de los anclajes en el hormigón, prefiriéndose normalmente colocarlos según las direcciones de las tensiones principales. Si los anclajes son barras de armaduras soldadas a la inserción, se analizará la posibilidad de precalentar las barras y utilizar electrodos de bajo contenido de hidrógeno para reducir la fragilidad de las uniones.

### 4.6.2. Protección

Siempre que la conexión de la pieza insertada esté expuesta a la atmósfera exterior o bien a otro tipo de ambiente agresivo, debe estar adecuadamente protegida; por ejemplo, mediante la galvanización por inmersión en caliente previa a su instalación. Las zonas galvanizadas dañadas por la soldadura en obra se protegerán posteriormente por galvanización "in situ".

## CAPITULO 5. CONSTRUCCION – DETALLES ARQUITECTONICOS – ECONOMIA

### 5.1. Consideraciones generales

El comportamiento de una lámina delgada de hormigón esta muy influenciado por su construcción y acabado. El término "comportamiento" incluye en este caso, no solo la manera en que la lámina transmite la carga y se deforma, si no también su eficiencia funcional, y, como parte de ésta, la estética. También, el aspecto económico del proyecto es muy importante; si el costo de una estructura laminar de hormigón no se justifica en función de los supuestos beneficios, no se construirá: el proyecto no se realizará, o se utilizará otro sistema estructural más eficiente y económico.

Por estas razones, el proyecto laminar, debe ser analizado desde los inicios de la concepción del diseño, el método de construcción y acabado, así como su coste previsto. En muchos casos, tales consideraciones serán decisivas para elegir el tipo y geometría de la estructura.

En este capítulo, se comentarán algunos factores de la construcción, acabado, y aspecto económico de las láminas delgadas de hormigón. El estudio se limita a aquellas caracterís-



ticas exclusivas de la construcción de láminas delgadas, no analizándose, o bien mencionándose someramente, los comunes a todos los tipos estructurales.

## 5.2. Construcción

### 5.2.1. Consideraciones generales

Hasta un cierto punto, quizás mayor que en el caso de otros sistemas estructurales, el método constructivo de una lámina delgada de hormigón influye en su comportamiento, en su aceptabilidad tanto funcional como estética, y en su costo. Así, en la selección del tipo y geometría de una lámina es necesario considerar todas las fases del proceso constructivo, incluyendo encofrado y cimbras, fabricación y colocación de las armaduras, colocación y curado del hormigón, forma de ejecución, y manera y secuencia de apeo y desencofrado; además de la posibilidad de la prefabricación, y del pretensado; en general, se deben tener presentes todas las características pertinentes al método de construcción, así como, la calidad exigida en el producto final, y, las tolerancias dimensionales aceptables para un método determinado.

### 5.2.2. Encofrados y cimbras

*Materiales:* Distintos materiales se han utilizado de forma satisfactoria en la ejecución de encofrados laminares. La madera (y “contrachapado”) es el material tradicional; los “encofrados en tierra” se han empleado no sólo en la construcción de cimientos de tipos laminares, si no también, en la de un número de cubiertas de gran luz. La “fibra de vidrio” se utiliza para realizar algunos tipos especiales de superficies de hormigón, mientras que los encofrados metálicos se usan fundamentalmente en la construcción de prefabricados. Tipos especiales de “papel”, reforzado con malla de acero soldado, se han empleado como encofrados para una lámina suspendida desde la armadura permanente. Los encofrados pueden ser incluso de “hormigón”, en cuyo caso son factibles de convertirse en una parte de la estructura final, o bien ser reutilizados. Recientemente, se ha progresado mucho en el uso de “encofrados neumáticos” hechos de “lonas” especiales u otros tipos apropiados de materiales; así como el empleo de encofrados laminares de “poliuretano rígido”, los cuales se convierten en aislantes de la estructura final. La elección de uno de estos diferentes sistemas de encofrados depende del aspecto económico y del tratamiento superficial deseado.

*Encofrados simples o dobles:* Se recomienda, siempre que sea posible, el empleo de encofrados simples (por una cara de la lámina). Si el hormigón se coloca por métodos tradicionales, el empleo de encofrados simples permite una reducción de la relación agua / cemento, facilita la colocación y vibrado, y por lo tanto, se obtienen hormigones más resistentes y superficies mejor acabadas. Los encofrados simples se pueden emplear hasta pendientes laminares de 30 grados, quizás hasta 45 grados; si la lámina supera esta inclinación en una zona sustancial de la estructura, es necesario el uso de encofrados dobles (por ambas caras de la lámina) o colocar el hormigón por otros procedimientos, tal como el lanzamiento a presión.

*Construcción de encofrados:* Los encofrados se construirán como para cualquier obra de hormigón. Deben ser herméticos para evitar la pérdida de lechada de cemento, y estar tratados superficialmente para facilitar el desencofrado. El antiadherente no debe ser perjudicial para el producto último, ni manchar y es conveniente aplicarlo previamente a la instalación de las armaduras de modo que se evite la pérdida de adherencia entre estas y el hormigón. Se recomienda estudiar la posibilidad de hacer encofrados inclinados para facilitar su retirada, particularmente cuando se empleen encofrados móviles. La inclinación típica utili-

zada en la construcción de las superficies planas de las vigas de borde varia del 1 a 5 por 100, no siendo el límite superior restrictivo.

*Resistencia y rigidez de los encofrados:* Los encofrados y cimbras serán lo suficientemente rígidos y resistentes para soportar las cargas propias y sobrecargas de uso que aparezcan durante el proceso constructivo. Se estudiarán las posibles fuerzas laterales a que puedan dar lugar las fuerzas verticales no compensadas, o las cargas de viento o las sísmicas. Al mismo tiempo, los proyectistas especificarán la contraflecha del encofrado necesaria para contrarrestar las deformaciones de la lámina.

*Desencofrado y descimbrado:* El director de la obra cuando sea posible, y siempre en el caso de tramos largos o de geometría poco frecuente, debe determinar la forma, la fecha y la secuencia de desencofrar y apea las cimbras. La fecha se fijará en función de la resistencia mínima necesaria del hormigón, (evaluada en probetas normalizadas y curadas en obra) y por la rigidez mínima exigida (medida a través del módulo de elasticidad del hormigón). Este último se calcula ensayando a flexión una viga ligeramente armada y curada en obra (unas dimensiones normales de la viga testigo pueden ser 100 mm x 150 mm x 1 m de longitud). La manera y secuencia del desencofrado y apeo se establecerá previamente al tipo y método de cimbras empleado, incorporando a estas gatos para facilitar su retirada. La secuencia del apeo será tal que la lámina no esté sometida a cargas puntuales, ni incluso temporalmente. En general, el descimbrado debe empezar en los puntos de máxima deflexión e ir progresando hacia los puntos de menor flecha. Los elementos de borde y auxiliares se apearán al mismo tiempo que la lámina; mientras que los elementos de apoyo no deben ser descimbrados antes que la lámina propiamente dicha. Cuando se prevea el reapuntalamiento, su acabado, forma de instalación y separación serán determinadas por el ingeniero. En ocasiones, puede ser útil retirar los encofrados de las columnas en primer lugar; permitiéndolo así inspeccionar la calidad del hormigón previamente al desencofrado de la lámina.

*Tolerancias:* El error con que un encofrado se construye y coloca varía según la localización del proyecto, el tipo de materiales empleados, y la habilidad de la mano de obra. Los encofrados metálicos utilizados en las plantas de prefabricado pueden ser elaborados con mayor precisión que los de madera o de tierra contruidos in situ. Sin embargo, la importancia del error de los encofrados, varía en función de la naturaleza del proyecto. Por ello es difícil fijar con carácter general las tolerancias, siendo el proyectista quien debe acotar los márgenes de estas atendiendo al conjunto de circunstancias de un proyecto dado.

### 5.2.3. Armaduras

En el párrafo 4.3. del Capítulo 4 de estas Recomendaciones, se analizaron algunas características en relación al tamaño, tipo y resistencias de las armaduras. A continuación, se comentan otros aspectos.

*Diámetro de barras:* A pesar de que se prefieren pequeños diámetros, se debe observar que las barras de pequeño diámetro son poco rígidas, y por lo tanto susceptibles de flectarse y ser desplazadas de forma permanente durante el proceso de construcción. Por esta razón, los redondos de pequeño diámetro se sustentan con mayor frecuencia en los encofrados que las barras de mayor sección. Debido a que el espesor de la lámina se fija frecuentemente por exigencias de las armaduras, una pequeña desviación respecto a la localización de proyecto de una barra puede representar una relativamente gran desviación con respecto a la resistencia de cálculo de la lámina. Por ello las barras deben colocarse cuidadosamente y ser mantenidas en tal posición de forma definitiva, particularmente en las zonas donde la lámina esta sometida a esfuerzos de flexión.

*Mallas de alambres soldados:* Este tipo de armadura es económica para láminas de sim-



ple curvatura, superficies regladas (tales como paraboloides hiperbólicos) y láminas rebajadas de doble curvatura donde sea posible aprovechar su facilidad de instalación. Además de las desventajas debidas al pequeño diámetro de las barras, anteriormente mencionadas, el alambre estirado en frío, base de tales mallas, tiende a acortarse y de aquí que no sean aptas para láminas de gran curvatura. En general, la precisión al instalar las mallas de alambre soldado es menor que la de otras barras más rígidas.

*Trayectoria de las armaduras:* Casi nunca es práctico colocar las barras formando un sistema ortogonal que siga las líneas de las tensiones principales, debido al alto coste de fabricación y colocación de este tipo de armado. Un método más comunmente utilizado consiste en definir un sistema ortogonal de barras compatible con la geometría de la lámina, y utilizar una tercera capa de barras situadas tan próximas como sea posible a las direcciones de las tracciones principales en aquellas zonas de la lámina de alta concentración de tensiones.

#### 5.2.4. Pretensado

En general, el proyecto y construcción del pretensado sigue las prácticas usuales y la normativa existente. La característica fundamental de su empleo en láminas viene dada por las posibles limitaciones que impone el pequeño espesor de éstas, que debe ser suficiente para situar los cables, y en las zonas de anclaje los posibles refuerzos para evitar la ruina por desplazamientos fuera de su plano, tal como se expuso en el Capítulo 4 de estas Recomendaciones. Por último, se estudiará una adecuada protección de los cables contra la corrosión y contra el fuego.

#### 5.2.5. El hormigón y su colocación

*Aridos:* El tamaño del árido no debe superar un cuarto del espesor de la lámina, la distancia libre entre armaduras, y ni una vez y media su recubrimiento. En el caso de utilizar encofrados dobles, el tamaño máximo de un árido no podrá superar una cuarta parte de la mínima distancia entre encofrados (o el espesor de la lámina), ni el recubrimiento de las armaduras. Estas limitaciones respecto al tamaño máximo del árido se deben a la necesidad de limitar variaciones en el material por las características heterogeneas del hormigón, evitar la formación de coqueras o partes de la lámina con exceso de mortero, y con ello conseguir las mínimas variaciones de la resistencia del hormigón.

*Colocación del hormigón:* El hormigón debe ser depositado tan próximo como sea posible a su posición final y de forma simétrica de modo que se evite la aparición de cargas no compensadas, eliminando así cimbras y riostras adicionales. Las juntas de construcción se detallarán en los planos y se localizarán preferentemente en las zonas de compresión de la lámina. El efecto de las tensiones de retracción, en la lámina que va a ser hormigonada por tramos, puede paliarse con el empleo de una adecuada secuencia de depósito de las coladas, convenientemente separadas en el tiempo y por medio de un curado apropiado. Si van a ser hormigonadas vigas de gran canto o diafragmas en conjunto con la lámina, se atenderá especialmente a la velocidad de colocación del hormigón, de modo que permita su consolidación en las vigas o diafragmas y evite la formación de juntas no previstas.

*Vibración:* Los vibradores de inmersión comunmente utilizados en la construcción de hormigón no son adecuados para láminas, debido a que el espesor de éstas es insuficiente para acomodarlos (el vibrador nunca debe ser colocado horizontalmente, pues así disgrega el hormigón en lugar de compactarlo). Tampoco se recomiendan vibradores unidos a las armaduras, ya que debilitan la adherencia entre estas y el hormigón, facilitando su fisuración;

además, para ser efectivo, el vibrado de armaduras requiere barras muy largas, bastante más que las usuales en las láminas. Los vibradores de encofrado se utilizan con frecuencia en encofrados dobles, particularmente en el caso de elementos prefabricados, y para evitar posibles segregaciones por el pequeño espesor de la lámina, los vibradores se trasladan a medida que se coloca el hormigón, de forma que se minimice la energía disipada. Para obtener resultados satisfactorios el equipo utilizado debe estar proyectado en base al principio de pequeña disipación de energía, y se sujete a una amplitud de vibración normal. En el caso de que el encofrado se sujete a una viga rígida (tales como una viga metálica) se pueden conectar los vibradores directamente a estas vigas, y así, vibrar todo el encofrado. Normalmente, en estos casos el amortiguamiento del sistema es suficiente para solo transmitir los niveles de poca energía al hormigón. En el caso de colocación "in situ" del hormigón en láminas con encofrados simples, las placas o reglas vibrantes superficiales son más apropiadas que los vibradores de inmersión, pues la profundidad de hormigón a compactar es pequeña.

*Curado de hormigón:* Las láminas delgadas son propensas a fisurarse por retracción, salvo que se siga un proceso de curado adecuado. Se recomienda, siempre que sea posible, humedecer las superficies del hormigón y cubrirlas con arpillera, durante siete días como mínimo, para mantenerlas constantemente húmedas. El empleo de membranas humectantes de curado es menos satisfactorio, pero aceptable, con condiciones meteorológicas moderadas. En tiempo frío, se recomienda el uso de aceleradores de fraguado anticongelantes en el hormigón.

#### 5.2.6. Láminas prefabricadas

Las ventajas de las láminas prefabricadas se basan en la mayor uniformidad y calidad, como consecuencia de utilizar métodos de taller, además, de poder reducir el coste (la mayor uniformidad permite utilizar elementos más delgados, normalmente hormigonados con encofrados dobles). Las armaduras, frecuentemente, se prefabrican en paneles de gran longitud con la curvatura apropiada, soldando los cruces de barras para aumentar la rigidez y reducir su espesor. Los problemas de colocación del hormigón, vibración y curado son notablemente más sencillos en condiciones de taller, consiguiéndose mayor resistencia, mejor acabado y elementos laminares dimensionados más exactamente. Por otra parte, los problemas de prefabricación de elementos laminares son semejantes a los hallados en la prefabricación de otros elementos estructurales de hormigón.

La prefabricación introduce dos factores que requieren especial consideración: el transporte y erección de los elementos posteriormente a su fabricación y el problema de las juntas, introducidas en la estructura para mantener el tamaño de los elementos prefabricados dentro de unas proporciones adecuadas para su manejabilidad y transportabilidad. La cuestión de las juntas debe estudiarse con detalle durante el proyecto; tema que se discute más adelante en el párrafo 5.3. El tamaño de los elementos prefabricados está limitado por las exigencias de transporte y por la capacidad del equipo empleado en la erección de la lámina, factores que deben analizarse como parte del proyecto.

Para reducir las tensiones y deformaciones a las que pueden estar sometidos los elementos laminares prefabricados durante su transporte y erección, el proyectista de láminas puede elegir entre aumentar el espesor de los bordes de estos elementos o situar los contornos de los elementos prefabricados a lo largo de líneas previamente provistas de elementos auxiliares. Tales elementos auxiliares pueden ser incorporados en taller o en obra, dando lugar, en este último caso, a juntas muy monolíticas. Esta solución ofrece la ventaja adicional de flexibilizar las exigencias respecto a las tolerancias mínimas.

Las condiciones ambientales que afecten a la corrosión deben estudiarse, pues pueden influir en el proyecto de las láminas prefabricadas.



## 5.3. Detalles arquitectónicos

### 5.3.1. Consideraciones generales

La importancia del acabado arquitectónico en el buen funcionamiento de una lámina delgada de hormigón es universalmente aceptada. Todo detalle arquitectónico debe ser proyectado y ejecutado para satisfacer exigencias funcionales y mejorar la estética, además de ser consistente con las necesidades económicas del proyecto. A continuación, se consideran algunos aspectos característicos de las estructuras laminares delgadas de hormigón. Los problemas comunes a otros tipos de sistemas estructurales no se exponen, o son brevemente mencionados.

### 5.3.2. Acabado de hormigón

Debido a su naturaleza como sistema estructural, las láminas delgadas se proyectan con frecuencia de modo que grandes superficies de hormigón están expuestas a la vista. Para los fines de estas recomendaciones, dicho hormigón se denominará "arquitectónico". En tales casos, debido al tamaño de las superficies expuestas, la influencia en la estética del proyecto puede ser notable; de ahí la importancia de un cuidadoso proyecto y control de la ejecución de estas superficies, encaminado a uniformizar la textura y color, a minimizar el aspecto visual de la fisuración, y a reducir el número de imperfecciones. Debe tenerse en cuenta que, dada la naturaleza del hormigón como material de construcción, no se puede conseguir la total uniformidad de textura y color, y que se producirá fisuración; por lo tanto, un prudente y pragmático proyectista procurará acabados dentro de la limitación de las características de los materiales y de la tecnología disponible para un proyecto dado.

*Diseño de superficies:* Las superficies arquitectónicas de hormigón se estudiarán a dos niveles. El "diseño a gran escala" comprende la organización de superficies en su conjunto; lograndose con la subdivisión de la superficie total expuesta en áreas menores, más cercanas a la dimensión humana. Siempre que sea posible, esta partición debe seguir las líneas propias de la estructura laminar, o la manera en que la lámina se construye, como ejemplos, se pueden citar las líneas de cambio de geometría de la lámina (tales como las uniones de los paraboloides hiperbólicos en una lámina tipo paraguas), líneas a lo largo de los nervios rigidizadores; las uniones de los elementos laminares, o de las juntas de construcción. Cualquiera que sea el criterio de división superficial, estará lógicamente relacionado con la estructura, su función y el método de construcción utilizado, y debe ser rápidamente perceptible por el observador. Por el "diseño a pequeña escala" se entiende el de una zona, definida por las líneas del diseño a gran escala. Incluye, entre otros aspectos, el acabado del hormigón, su textura y color.

*Tipos de acabado de hormigón:* En general, se pueden diferenciar dos tipos de terminación; el "acabado con huellas del encofrado" consiste en dejar las superficies esencialmente inconclusas, con las partes visibles de estas a base de mortero y con textura suave o rugosa dependiendo de la naturaleza y superficie del encofrado. Los "tratamientos de acabado superficial" finalizan la superficie después de desencofrar por cualquiera de los métodos existentes para eliminar parte del mortero superficial y mostrar los áridos en el grado deseado. Como ayuda a este proceso se han utilizado retardadores superficiales de fraguado, lavados superficiales, ácidos limpiadores, chorros de arena, tratamientos mecánicos (bujarda por ejemplo), áridos con microorganismos, áridos precolocados y sustitución de áridos. Con procedimientos básicamente iguales a los de otro tipo de construcción de hormigón.

*Color:* El color deseado se puede conseguir añadiendo colorantes adecuados a la mezcla, empleando áridos de determinado color, o por pintado, este último método cambia el color pero no la textura.

### *5.3.3. Impermeabilidad*

Las láminas debido al tamaño y grado de exposición de las superficies de hormigón son sensibles al agua y a la impermeabilidad. Problema este último que no parece se pueda evitar con el uso de aditivos; no obstante, en algunos casos, se soluciona con un buen pretensado. Sin embargo, la mayoría de las veces las láminas se cubren con otros materiales sancionados por la práctica para garantizar la impermeabilidad.

### *5.3.4. Uniones*

Las uniones entre elementos laminares (juntas de construcción) se proyectarán para transmitir las cargas tal como se ha especificado en estas Recomendaciones, además, de asegurar la impermeabilidad y proteger las armaduras frente a la corrosión; pudiéndose emplear para ello masilla de calefatear si las juntas no van a ser pisadas. En el caso de elementos prefabricados, se estudiarán las posibles rotaciones en las uniones.

### *5.3.5. Accesorios mecánicos y eléctricos*

Los accesorios mecánicos presentan los mismos problemas que en cualquier tipo de construcción de hormigón. La posible excepción son los engarces de cañerías y cables eléctricos, pues debe evitarse la concentración de cargas en la estructura; si estas fuesen considerables se emplearan elementos auxiliares capaces de distribuir tales cargas. Los conductos eléctricos no se instalarán en la lámina propiamente dicha salvo que su espesor sea como mínimo diez veces mayor que el diámetro del conducto. Además los conductos paralelos se espaciaran por lo menos seis veces el espesor de la lámina (en el plano de la superficie) y se evitará que corten o desplacen las armaduras de la lámina.

## **5.4. Economía**

### *5.4.1. Recomendaciones generales*

El costo del proyecto y construcción de una estructura laminar delgada de hormigón varía mucho, no sólo con el tipo y dimensiones, si no también con la ubicación. La disponibilidad de materiales, equipamiento, de mano de obra especializada y, finalmente, la accesibilidad de auxiliares de proyecto, tales como ordenadores, afectan en gran medida al costo final del proyecto. Por esta razón, no es posible un estudio económico de proyecto y construcción de láminas válido en todos los continentes y países; reduciéndose necesariamente el alcance y aplicabilidad de las recomendaciones contenidas en este artículo. Se supone que en cada caso los aspectos económicos de un proyecto que contenga láminas deben ser examinados.

En general, las estructuras laminares delgadas de hormigón utilizan los materiales de forma muy efectiva, de manera que la proporción de material preciso para encerrar un espacio al volumen encerrado es menor que para otro sistema estructural.

Es más, el material que en si mismo es predominante es poco costoso: hormigón relativamente barato, con no demasiada cantidad de armadura; sin embargo, la buena construcción de láminas exige personal altamente especializado, tanto en el proyecto como en la construcción, y de ahí que la relación de costos trabajo-material tienda a ser, quizás, más alta que para otros sistemas estructurales erigidos en el mismo lugar.



#### 5.4.2. Coste del proyecto

El coste del proyecto de una estructura laminar depende fundamentalmente de la geometría de ésta. En algunos casos tales como láminas cilíndricas circulares, cúpulas esféricas, paraboloides hiperbólicos de luces medias y láminas plegadas prismáticas, el costo del proyecto es del mismo orden de magnitud que en el de otras estructuras. Las láminas delgadas de geometría más compleja son bastante más costosas de calcular, salvo que la solución pueda obtenerse por medio de un programa de ordenador existente, y bien conocido por el proyectista; no es aventurado decir que la carestía de desarrollar un programa para un proyecto dado es prohibitiva. En algunos casos puede ser rentable variar la geometría estructural, incluso a expensas de aumentar la cantidad de material, para utilizar un tipo de lámina más frecuente, o una geometría para la cual existan programas fiables de fácil acceso.

#### 5.4.3. Coste de construcción

En una lámina de geometría dada, el coste de los materiales de construcción, hormigón y armaduras, se fija dentro de unos estrechos márgenes. Los encofrados y cimbras son donde el proyectista y constructor tienen mayor control, por ello durante años se ha estudiado la reducción de costes de encofrado. A continuación se desarrollan algunas soluciones.

*Geometría laminar:* El precio de la lámina puede reducirse utilizando una geometría conveniente de modo que los encofrados puedan ser contruidos con elementos planos o lineales. Como ejemplo, el encofrado de una lámina rebajada con forma de paraboloide hiperbólico se puede definir por medio de pequeños rectángulos o cuadrados planos, del mismo modo, el encofrado de una lámina cilíndrica puede fabricarse con tablonos dispuestos según la directriz. Como regla, se puede decir que las láminas rebajadas y las láminas desarrollables reducen el costo total de la construcción.

*Coste del material de encofrado:* El material típico para la fabricación de encofrados es la madera o el contrachapado; no obstante, en lugares donde estos materiales no son fácilmente accesibles, o son caros, se han utilizado otros con éxito variable: los encofrados de tierra se han empleado en la construcción de cimientos de tipo laminar, en cúpulas de grandes luces, y en láminas formadas por distintos elementos. El papel reforzado con mallas de alambre soldado y unido a armaduras permanentes se ha usado en la erección de cúpulas invertidas. Encofrados de hormigón armado, que eventualmente se incorporan a la obra final, se han empleado en la erección de láminas nervadas de distinta geometría.

*Encofrados reutilizables:* Cuando sea posible, el costo de los encofrados puede reducirse, si estos se utilizan en distintas ocasiones. Esta solución es apta para los proyectos que incluyan las mismas formas geométricas varias veces, para las grandes superficies donde los encofrados puedan ser trasladados de una a otra parte de la lámina y para la prefabricación. Reutilizando el encofrado muchas veces, el coste de éste por unidad de área de lámina puede ser significativamente menor que si empleasen los métodos tradicionales de construcción.

*Método de depositar el hormigón:* El coste del encofrado puede reducirse a veces mediante un método apropiado de depositar el hormigón. Por ejemplo, en las zonas de la lámina con una pendiente que excede los límites de aplicabilidad de un encofrado simple, el uso de encofrados con doble cara puede evitarse mediante la utilización de hormigón depositado neumáticamente.

*Prefabricación:* El prefabricado presenta una solución constructiva diferente, donde el ahorro puede ser debido no solo a la disminución del coste de los encofrados, sino también, por la industrialización de los métodos productivos; además, de que en algunos países el costo de la mano de obra en taller es menor que la de pie de obra. La condición necesaria para

la prefabricación es que la geometría laminar sea descomponible en módulos; junto, a disponer de un equipamiento constructivo adecuado para obtener todas las posibles ventajas de la prefabricación.

#### 5.4.4. Acabado

La influencia del acabado en el coste final de una lámina es semejante al de otros sistemas estructurales. Se procurará utilizar los mismos detalles de forma repetitiva, reduciendo así la cantidad de material y la mano de obra, manteniendo la eficiencia del acabado.

\*\*\*

#### Unidades:

La correspondencia entre las unidades del sistema Metro-Kilopondio-Segundo y las del Sistema Internacional S.I. es la siguiente:

a) Kilopondio-newton

$$1 \text{ kp} = 9,8 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$$

e inversamente,

$$1 \text{ N} = 0,102 \text{ kp} \approx 0,1 \text{ kp}$$

b) Kilopondio por centímetro cuadrado – Newton por milímetro cuadrado

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 0,098 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

e inversamente,

$$1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10,2 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \approx 10 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Las unidades prácticas recomendadas en el sistema S.I. son las siguientes:

Para resistencias y tensiones:  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$

Para fuerzas: kN

Para fuerzas por unidad de longitud:  $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Para fuerzas por unidad de superficie:  $\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Para fuerzas por unidad de volumen:  $\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

Para momentos: kN.m



## CAPITULO 6. BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA SOBRE LAMINAS

### 6.1. Consideraciones generales

La literatura de láminas de hormigón es muy amplia pero aquí no se pretende ofrecer una bibliografía exhaustiva. Las referencias incluidas han sido seleccionadas en base a su importancia, utilidad y accesibilidad a los proyectistas de láminas de hormigón. Se ha intentado incluir literatura de distintos países y lenguas. Debido a las restricciones de espacio, para mantener esta bibliografía dentro de unos márgenes razonables se ha tenido que prescindir de algunas referencias de incuestionable valor, tanto histórico como teórico, cuyo contenido esta incluido en otros textos de más fácil acceso y aquí nombrados. La única excepción a esta regla son las citas del Capítulo 3 de estas Recomendaciones que se dan en el párrafo 6.2 de la bibliografía. Notese que muchas de las referencias contienen ellas mismas su propia lista de textos.

Constantemente aparece información sobre proyecto, cálculo y construcción de láminas de hormigón en numerosas publicaciones profesionales técnicas o de investigación. Mención especial en este apartado debe hacerse del "Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures", publicado en Madrid, España; este boletín de IASS es el único de aparición periódica dedicado exclusivamente a las estructuras espaciales y laminares.

La bibliografía esta organizada como sigue: las referencias citadas en el Capítulo 3 se agrupan en el párrafo 6.2; la selección bibliográfica del párrafo 6.3 se divide posteriormente en grupos tales como libros de texto, y trabajos dedicados a aspectos específicos del proyecto, cálculo y construcción de láminas. Otras subclasificaciones muestran las listas de Actas del Congreso de Láminas organizado por la IASS u organismos afines, y los pocos códigos o normas de láminas existentes en distintos países.

La manera en que se dá la referencia de un determinado texto está de acuerdo con un formato generalmente admitido. En el caso de una publicación periódica, su nombre se sigue con el número del volumen, el número del ejemplar (si existe), el año de la edición entre paréntesis y el número de las páginas. El uso del título original resultó poco práctico; en su lugar, se empleó la traducción inglesa, seguida de una indicación de la lengua original. Notese que muchos de estos textos se han traducido a varios idiomas; en estos casos, solo se dá una referencia, no necesariamente la de la primera publicación.

### 6.2. Referencias citadas en el texto

1. Aron, H., "The equilibrium and motion of an infinitely thin curved elastic shell" (en alemán), *Journal f. reine und ang. Math.* v. 78 (1874).
2. Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells", *Phil. Trans. Royal Society (London)*, v. 17A, pp. 491-546 (1888).
3. Love, A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4ª edición, New York, Dover Publications (1927).
4. Sanders, J.L., *An improved first-approximation theory for thin shells*, NACA TR R-24 (1959).
5. Koiter, W. T., "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells", *Proc. of the IUTAM Symposium on the theory of thin elastic shells, Delft 1959*, North Holland, Amsterdam (1960), pp. 12-33.
6. Flügge, W., *Statics and dynamic of shells* (en alemán), Berlín, Julius Springer-Verlag (1934).
7. Lur'e, A.I., "The general theory of thin elastic shells" (en ruso), *Prikl. Mat. Mekh.*, v. 4, no.7 (1940).
8. Byrne, R., *Theory of small deformations of a thin elastic shell*, University of California (Los Angeles) Publications in Mathematics, N.S., v. 2, (1944), pp. 103-152.
9. Reissner, E., *Small bending and stretching of sandwich-type shells*, NACA Report 975 (1950).
10. Koiter, W.T., "A systematic simplification of the general equations in the linear theory of thin shells", *Proc. Kon. Acad. Wetenschappen afd. Nat. Amsterdam*, May 1961.

11. Donnell, L.H., "A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending", *Trans. ASME*, v. 56, (1934), pp. 795-806.
12. v. Karman, T., and H.S. Tsien, "The bending of thin cylindrical shells under axial compression", *J. of the Aeronautical Sciences*, v. 8, (1941), p. 303.
13. Jenkins, R.S., Theory and design of cylindrical shell structures, The O.N. Arup Group of Consulting Engineers, London, May 1947.
14. Vlasov, V.Z., "Basic differential equations in the general theory of elastic shells" (en ruso), *Prikl. Mat. Mekh.*, v. 8, no. 2 (1944).
15. Goldenveizer, A.N., Theory of elastic thin shells (trad. del ruso), New York, Pergamon Press (1961).
16. Green, A.E., and W. Zerna, *Theoretical elasticity*, Oxford, Oxford University Press (1954).
17. Novozhilov, V.V., The theory of thin shells (trad. del ruso), Groningen, The Netherlands, P. Nordhoff Ltd. (1959).
18. Lundgren, H., Cylindrical shells, Vol. I - Cylindrical Roofs, The Institution of Danish Civil Engineers, Copenhagen, The Danish Technical Press, (1949).
19. Evans, H.R. and K.C. Rokey, "A critical review of the methods of analysis for folded plate structures", *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, v. 49 (1971), pp. 171-192.
20. Johnson, C.D. and T. Lee, "Long nonprismatic folded plate structures", *J. Struct. Div. ASCE*, v. 49, ST 6 (1968), pp. 1457-1484.
21. Collatz, L., The numerical treatment of differential equations, 3<sup>a</sup> edición, New York Springer-Verlag (1966).
22. Kraus, H., Thin elastic shells, New York, John Wiley & Sons (1967).
23. Soare, M., Application of finite difference equations to the analysis of shells (en francés), París, Editions Eyrolles (1962).
24. Bushnell, D., B.O. Almroth and F. Brogan, "Finite difference energy method for nonlinear shell analysis", *Computers and Structures*, v. 1 (1971), pp. 361-387.
25. Zienkiewicz, O.C., The finite element method, 3<sup>a</sup> edición. New York, McGraw-Hill (1977).
26. Lin, C.S. and A.C. Scordelis, "Nonlinear analysis of R.C. shells of general form", *J. Struct. Div. ASCE*, v. 101, ST 3 (1975).
27. Kollar, L. and E. Dulacska, Buckling of shells (en alemán), Budapest, Akademiai Kiado, (1975).

### 6.3. Bibliografía seleccionada sobre láminas

#### 6.3.1. Actas del Congreso del IASS

1. Madrid, 1959: "Non-traditional construction processes of shell structures", *Bulletin IASS*, nos. 1 hasta 9 (1960).
2. Dresden, 1961: "Precast shells", summary published in the *Bulletin IASS* no. 10 (1961).
3. Delft, 1961: "Shell research", A.M. Haas and A.L. Bouma, eds., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1962).
4. Brussels, 1961: "Simplified calculation methods", A. Paduart and R. Dutron, eds., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1962).
5. París, 1962: "Hanging roofs, continuous metallic shell roofs, and superficial lattice roofs", N. Esquillan and Y. Saillard, eds., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1963).
6. San Francisco, 1962: "World conference on shell structures", S.J. Medwadowski *et al.*, eds., Publication No. 1187, National Academy of Sciences-National Research Council, Washington, D.C. (1964).
7. Warsaw, 1963: "Non-classical shell problems", W. Olszak and A. Sawczuk, eds., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1964).
8. Southampton, 1964: "The theory of arch dams", J.R. Ryzewski, ed., Pergamon Press, London (1965).
9. Budapest, 1965: "Shell structures in engineering practice", Kultura Budapest, Budapest (1966); cf. *Bulletin IASS* Nos. 25, 26 y 27 (1965-66).
10. Bratislava, 1966: "Tower-shaped steel and reinforced concrete structures", R. López Palanco *et al.*, eds., IASS, Madrid (1967).
11. Leningrad, 1966: "Problems of interdependence of design and construction of large span shells for industrial and civic buildings", Gosstroy USSR, Moscow (1967), vol. 1 y 2.
12. Stuttgart, 1967: "Pneumatic structures", Institut für Modellstatik, Technische Hochschule, Stuttgart (1968).
13. México City, 1967: "The application of shell structures in architecture" (Actas no publicadas); cf. *Bulletin IASS* Nos. 38, 39, 40, 41 and 42.
14. Weimar, 1968: "Pipes and tanks", summary published in *Bulletin IASS*, No. 46 (1971).



15. The Hague, 1969: "Tower shaped structures", Institute T.N.O., Delft (1969).
16. Madrid, 1969: "Progress of shell structures in the last ten years and its future development", IASS, Madrid (1969-70).
17. Vienna, 1970: "Folded plates and prismatic structures", K. Krapfenbauer, ed., R. Krapfenbauer, Vienna (1973), vol. 1 y 2.
18. Beirut, 1971: "Future development in spatial structures; application of shells to low cost housing" (Actas no publicadas).
19. Honolulu, 1971: "Hydromechanically loaded shells", R. Szilard, ed., The University Press of Hawaii, Honolulu (1972).
20. Tokyo, 1971: "Tension structures and space frames", Y. Yokoo, T. Nakamura, K. Heki and S. Kawamata, eds., Architectural Institute of Japan, Tokyo (1972).
21. Calgary, 1972: "Shell structures and climatic influences", P. G. Glockner *et al*, eds., The University of Calgary, Calgary (1973).
22. Delft, 1972: "Pneumatic structures", E. Haug, ed., Stichting PDOB, Delft (1973).
23. Kielce, 1973: "Industrialized spatial and shell structures", Technical University of Kielce (1973).
24. Haifa, 1973: "Prefabricated shells", J. Glüch, ed., Technion City, Haifa.
25. Udine, 1974: "Folded plates and spatial panel structures" (Actas no publicadas).
26. Bratislava, 1975: "Cable structures", House of Technology, CSVTS, Bratislava.
27. Montreal, 1976: "Space enclosures", P. Fazio *et al*, eds., Building Research Center, Concordia University, Montreal (1976).
28. Alma Ata, 1977: "Lightweight shell and space structures for normal and seismic zones", V. Raizer *et al*, eds., MIR Publishers (1977).
29. Darmstadt, 1978: "Nonlinear behavior of reinforced concrete spatial structures", (en prensa).
30. Morgantown, West Virginia: "Shells and spatial structures: the development of form", (en prensa).

### 6.3.2. Actas de otras Conferencias y Congresos

1. London, 1952: "Proceedings of a symposium on concrete shell roof construction", P.J. Witt, ed., Cement and Concrete Association, London (1954).
2. Cambridge, Mass., 1954: "Proceedings of the conference on thin concrete shells", MIT Press (1954).
3. Oslo, 1957: "Proceedings of the second symposium on concrete shell roof construction", A. Aas-Jacobsen *et al*, eds., Teknisk Ukeblad, Oslo (1958).
4. Delft, 1959: "Proceedings of the I.U.T.A.M. Symposium on the theory of thin elastic shells", W.T. Koiter, ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1960).
5. Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1962: "Collected papers on instability of shell structures", NASA TN C-1510, NASA, Washington, D.C. (1962).
6. Houston, 1966: "Proceedings of the symposium on the theory of shells to honor Lloyd Hamilton Donnell", D. Muster, ed., University of Houston, Houston, Texas (1967).
7. London, 1966: "Space structures, a study of methods and developments in three-dimensional construction resulting from the international conference on space structures, University of Surrey, Sept. 1966", R.M. Davies, ed., Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh (1967).
8. Copenhagen, 1967: "Proceedings, second I.U.T.A.M. symposium on theory of thin shells", F. I. Niordson, ed., Springer-Verlag, Berlín (1969).
9. New York, 1970: "Proceedings of the ACI symposium on concrete thin shells", S.J. Medwadowski, W.C. Shnobrich and A.C. Scordelis, eds., American Concrete Institute, SP-28, Detroit, Michigan (1971).
10. Pasadena, 1972: "Proceedings of the symposium on thin shell structures: theory, experiment and design", Y.C. Fung and E.E. Sechler, eds., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

### 6.3.3. Textos generales

1. Ramaswamy, G.S., Design and construction of concrete shell roofs, New York, McGraw-Hill (1976).
2. Rühle, H., Spatial roof structures, vol. 1, Concrete, wood, ceramics; vol. 2, Steel (en alemán), Berlín, VEB Verlag für Bauwesen (1969, 1970).

### 6.3.4. Diseño conceptual

1. De Syllas, L., "Domes, vaults and the development of shell roofing", pp. 3-17 of *Symposium on concrete shell roof construction*, London (1952).

2. Faber, C., *Candela: the shell builder*, New York, Reinhold Publishing Corporation (1963).
3. Huybers, P., "Development of standardized plastics building structures", *Bulletin IASS*, No. 54 (1974).
4. Joedicke, J., *Shell architecture*, (con contribución de W. Bauersfeld y H. Kupfer), New York, Reinhold Publishing Corporation (1963).
5. Medwadowski, S.J., "Conceptual design of shells", pp. 15-39 of *Proceedings, ACI Symposium on Concrete Thin Shells*, ACI Publication SP-28, Detroit (1971).
6. Michaels, L., *Contemporary structure in architecture*, New York, Reinhold Publishing Corporation.
7. Nervi, P.L., *Structures*, (trad. del italiano), New York, F.P. Dodge Corporation (1956).
8. Nervi, P.L., *Aesthetics and technology in building*, (trad. del italiano), Boston, Harvard University Press (1965).
9. Raafat, A., *Reinforced concrete in architecture*, New York, Reinhold Publishing Corporation.
10. Riani, P., *Kenzo Tange*, London, Hamlyn (1969).
11. Siegel, C., *Structure and form in modern architecture* (trad. del alemán), New York, Reinhold Publishing Corporation (1962).
12. Slawinska, J., *Expression of forces in modern architecture* (en polaco), Arkady, Warsaw (1969).
13. Torroja, E., *The structures of Eduardo Torroja*, (trad. del español), New York, Reinhold Publishing Corporation, (1958).
14. Torroja, E., *Philosophy of structures* (trad. del español), por J.J. Polivka y Milos Polivka, University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1958).

### 6.3.5. Cálculo, construcción y acabado

Además de las citas dadas a continuación, se recomienda, asimismo, las de los párrafos 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 y 6.3.4; y también, el Boletín del IASS, y además, revistas profesionales y de investigación. El estado del arte en el proyecto, cálculo y construcción de las láminas de hormigón está cubierto hasta la fecha por la referencia 16 del párrafo 6.3.1 (IASS Congreso de Madrid 1969), y la 9 del párrafo 6.3.2 (ACI Congreso de New York 1970).

1. Ambartsumyan, S.A., *Theory of anisotropic shells* (en ruso), Moscow, GIMFL (1961).
2. Baumann, Th., "On orthogonal reinforcing of shells and folded plates" (en alemán), *Bauingenieur*, vol. 47 (1972), pp. 367-377.
3. Belluzzi, O., *Structural mechanics*, vol. III (en italiano), Bologna, Nicalo Zanichelli Editore (1958).
4. Billington, D.P., *Thin shell concrete structures*, New York, McGraw-Hill, (1965).
5. Brush, D.O. and B.O. Almroth, *Buckling of bars, plates and shells*, New York, McGraw-Hill, (1974).
6. Candela, F., "General formulas for membrane stresses in hyperbolic paraboloid shells", *Journal ACI* vol. 32 (1960), pp. 353-371.
7. Cicala, P., *Linear shell theories*, Levrotto and Bella, Torino (1978).
8. Csonka, P., *Membrane shells* (en alemán), Berlín, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohns, (1966).
9. Dabrowski, R., "Analysis of prestressed cylindrical shell roofs", *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, vol. 89, ST 5 (1963), pp. 91-116.
10. Esquillan, N., "The shell vault of the Exposition Palace, Paris", *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, vol. 86, ST 1 (1960), pp. 41-70.
11. Esquillan, N., "Olympic ice stadium at Grenoble", *Journal ACI*, vol. 66 (1969).
12. Flügge, W., *Stresses in shells*, Berlin, Springer-Verlag, (1960).
13. Gerard, G. and H. Becker, "Handbook of structural stability", Part III, *Buckling of curved plates and shells*, NACA TN 3783, and Part VI, *Strength of stiffened curved plates and shells*, NACA TN 3786, NACA, Washington, D.C., (1957 and 1958).
14. Girkmann, K., *Surface structures* (en alemán), 5ª edición, Vienna, Springer-Verlag, (1961).
15. Goldverg, J.E. and H.L. Leve, "Theory of prismatic folded plate structures", *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, vol. 17 (1957), pp. 59-86.
16. Gravina, P.B.J., *Theory and calculation of rotational shells* (en alemán), Berlin, Springer - Verlag, (1961).
17. Guerra, G., *Statics and technology of construction of ancient and modern domes* (en italiano), Naples, Instituto di Architettura Tecnica, (1958).
18. Haas, A.M., "Design of thin concrete shells", Vol. 1, Positive curvature index, Vol. 2, Negative curvature index, New York, John Wiley & Sons, Inc., (1967).
19. Jenkins, R.S. and O.N. Arup, "The design of a reinforced concrete factory at Brynmawr, South Wales", *Proceedings*, Institution of Civil Engineers (London), vol. 2, Part 3 (1953), p. 345 and following.



20. Khaidukov, G.K. and V.V. Shugaev, "The methods for testing models for thin-walled shell structures", *Proceedings*, RILEN Symposium on Methodology and technique of testing structures, Bucharest (1969).
21. Kollar, L., "On the behavior of shells in the postbuckling range", *Bulletin IASS*, No. 39 (1969), pp. 41-51.
22. Lin, T.Y. and B.W. Young, "Two large shells of post-tensioned precast concrete", *Civil Engineering Magazine - ASCE*, vol. 35, No. 7 (1965).
23. Medwadowski, S.J., "Bending of thin shell conical frustum segments", *Proceedings*, IASS Symposium on simplified calculation methods, Brussels, 1961, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1962), pp. 398-415.
24. Manyhard, I., Surface structures, statical calculations and dimensioning (en húngaro), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, (1966).
25. Paduart, A., Introduction to shell roof analysis (trad. del francés), London, OR Books, Ltd., (1966).
26. Paduart, A., "Checking of the reinforcement sections of a concrete shell", *Bulletin IASS*, No. 53, (1973), pp. 39-44.
27. Parme, A.L., "Hyperbolic paraboloids and other shells of double curvature", *Proceedings*, ASCE, vol. 82, ST 5 (1956), pp. 1-32.
28. Pfluger, A., Elementary statics of shells (en alemán), 2ª edición, Berlín, Springer-Verlag, (1957).
29. Popov, E.P. and S.J. Medwadowski, "Membrane stresses in hyperbolic paraboloidal shells circular in plan", *Publications, Int. Assoc. for Bridge and Struct. Eng.*, vol. 20 (1960), pp. 283-297.
30. Pozo, F. del, "Thin cylindrical shells formed by a triangular mesh" (en francés), *Preliminary Publication*, 5th Congress of the Int. Assoc. of Bridge and Struct. Eng., Lisbon (1956).
31. Rosenblueth, E., "Shell reinforcement not parallel to principal stresses", *Journal ACI*, vol. 27, No. 1 (1955), pp. 61-71.
32. Rühle, H., "The use of gypsum models in experimental studies of doubly curved corrugated and conical shells, and applications" (en alemán), *Proceedings*, IASS Symposium Delft 1961, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1962).
33. Samartín, Q.A. and J. Martínez, "Dynamic analysis of translational shells", *Proceedings*, IASS Symposium of Alma Ata, 1977, MIR Publishers (1977), vol. 1, pp. 368-387.
34. Scordelis, A.C., "Analysis of cylindrical shells and folded plates", *Proceedings*, ACI Symposium on concrete thin shells, ACI Publication SP-28, Detroit (1971), pp. 207-236.
35. Tedesko, A., "Construction aspects of thin shell structures", *Journal ACI*, vol. 49 (1943), pp. 505-520.
36. Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells", 2ª edición, McGraw-Hill, New York (1960).
37. Yitzhaki, D., Prismatic and cylindrical shell roofs, Haifa Science Publishers. Haifa, Israel (1958).

### 6.3.6. Tablas y gráficos auxiliares de cálculo

1. Apeland, K. and E.P. Popov, Design tables for translational shells, University of California, Berkeley (1963).
2. Anon., *ASCE Manual No. 31*, design of cylindrical concrete shell roofs, New York, ASCE (1952, reeditado en 1954 y 1956); ver también, ref. 25 a continuación.
3. Baker, B.R. and C.B. Cline, Jr., "Influence coefficients for thin smooth shells of revolution subjected to symmetric loads", *J. Appl. Mech.*, vol. 29 (1962), pp. 335-339.
4. Baltrukonis, J.H., "Influence coefficients for edge loaded, thin, conical frustums", *J. Appl. Mech.*, vol. 26 (1959), pp. 241-245.
5. Brebbia, C.A. and A.J. Ferrante, "On the parabolic velaroidal shell", *Bulletin IASS*, No. 38 (1969), pp. 31-48.
6. Caligo, D., and M.J. Schwartz, eds., "Calculation of circular cylindrical thin shells", (en italiano), Part IV of *Manuali per applicazioni tecniche del calcolo*, Rome, Edizioni Cremonese (1960).
7. Casacci, B. and J. Bosc, Calculation of conical shells in bending (en francés), París, Dunod (1959).
8. Chinn, J., "Cylindrical shell analysis simplified by beam method", *Journal ACI*, vol. 30 (1959), pp. 1183-1192; discusión por Parme y Connor, *Journal ACI*, vol. 31 (1959), pp. 1584-1591.
9. Galletly, G.D., "Influence coefficients for hemispherical shells with small openings at the vertex", *J. Appl. Mech.*, vol. 22 (1955), pp. 20-24.
10. Galletly, G.D., "Bending of open-crown ellipsoidal shells", *Welding Research Council Bulletin* No. 54 (1959).
11. Galletly, G.D., "Influence coefficients for open-crown hemispheres", *Trans. ASME*, vol. 82A (1960), pp. 73-81.

12. Galletly, G.D., "Influence coefficients for toroidal shells of positive Gaussian curvature", *Trans. ASME*, vol. 82B (1960), 60-68.
13. Galletly, G.D., "Edge influence coefficients for toroidal shells of negative Gaussian curvature", *Trans. ASME*, vol. 82B (1960), pp. 69-77.
14. Holland, I., *Design of circular cylindrical shells*, Oslo, Oslo University Press (1957).
15. Parme, A.L. and H.W. Connor, "Design constants for ribless concrete cylindrical shells", *Bulletin IASS*, No. 18 (1964), pp. 11-56.
16. Portland Cement Association, *Design of circular domes*, PCA ST 55, Skokie, Ill., USA.
17. Portland Cement Association, *Design of barrel shell roofs*, PCA ST 11, Skokie, Ill., USA.
18. Portland Cement Association, *Elementary analysis of hyperbolic paraboloid shells*, PCA ST 85, Skokie, Ill., USA.
19. Portland Cement Association, *Design constants for interior cylindrical concrete shells*, PCA Advanced Engineering Bulletin I, PCA, Chicago (1960).
20. Portland Cement Association, *Direct solution of folded plate concrete roofs*, PCA Advanced Engineering Bulletin 3, PCA, Chicago (1960).
21. Portland Cement Association, *Design constants for circular arch bents*, PCA Advanced Engineering Bulletin 7, PCA, Chicago (1963).
22. Portland Cement Association, *Design constants for circular and elliptical arches of variable thickness*, PCA Advanced Engineering Bulletin 8, PCA, Chicago (1963).
23. Portland Cement Association, *Parabolic arches of variable thickness*, PCA Advanced Engineering Bulletin 9, PCA, Chicago (1963).
24. Portland Cement Association, *Design constants for ribless concrete cylindrical shells*, PCA Advanced Engineering Bulletin 11, PCA, Chicago (1964).
25. Portland Cement Association, *Coefficients for design of cylindrical concrete shell roofs* (ampliación de las tablas de proyecto 2A y 2B en ASCE Manual No. 31), PCA, Chicago (1959); (véase referencia 2 de este párrafo).
26. Rüdiger, D. and J. Urban, "Circular cylindrical shells, a tabular compilation for computing circular cylindrical shell structures of arbitrary dimensions" (en inglés y alemán), Leipzig, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft (1955).
27. Szmodits, K., "Design constants for spherical shells", *Bulletin IASS*, No. 19 (1964), pp. 33-46.
28. Taylor, C.E. and E. Wenk, "Analysis of stresses in the conical segments of shell structures", *Proc. 2nd U.S. Nat'l Congress of Appl. Mech.*, ASME (1955), pp. 323-331.
29. Watts, G.W. and H.A. Lang, "Stresses in a pressure vessel with a conical head", *Trans. ASME*, vol. 74 (1952), pp. 315-331.

### 6.3.7. Ordenadores: registros y programas

1. Gallagher, R.H., "Analysis of plate and shell structures", in *Proceedings of the symposium on application of finite element methods in civil engineering*, Nov. 1969, Nashville, Tenn., W.H. Rowan and R. M. Hackett, eds., American Society of Civil Engineers (1969), pp. 155-205.
2. Bushnell D., "Thin shells", in *Structural mechanics computer programs, surveys, assessments and availability*, W. Pilkey *et al.*, eds., University Press of Virginia, Charlottesville (1974), pp. 277-359.
3. Fredriksson, B. and J. Mackerle *Structural mechanics finite element computer programs — surveys and availability*, Dept. of Mech. Eng., Div. of Solid Mech., Linköping Institute of Technology, Linköping, Sweden (1975).
4. ANSYS (Analysis System).  
John S. Swanson  
Swanson Analysis Systems, Inc.  
870 Pine View Drive  
Elizabeth, PA 15037 USA.
5. ASKA (Automatic System for Kinematic Analysis).  
J.H. Argyris and H. Parisch  
Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen  
Universität Stuttgart  
7 Stuttgart 80  
Pfaffenwälding 27  
West Germany



6. BOSOR 4  
D. Bushnell  
Department 5233, Lockheed Missiles and Space Co.  
3251 Hanover St.  
Palo Alto, CA 94301 USA.
7. EASE 2  
Engineering Analysis Corporation  
1611 South Pacific West Highway  
Redondo Beach, CA 90277 USA.
8. ELAS  
Computer Structural Analysis Fund  
Duke University, Civil Engineering Department  
Durham, NC 27706 USA.
9. MARC  
P. Marcal and H.D. Hibbitt  
Marc Analysis Research Corporation  
105 Medway Street  
Providence, RI 02906 USA
10. NASTRAN  
Cosmic Information Services  
112 Barrows Hall  
The University of Georgia  
Athens, GA 30602 USA.
11. NONSAP  
E.L. Wilson and K. Wong  
NISEE, 720 Davis Hall  
University of California  
Berkeley, CA 94720 USA.
12. SAP IV  
E.L. Wilson and K. Wong  
NISEE, 720 Davis Hall  
University of California  
Berkeley, CA 94720 USA.
13. STRUDL II  
ICES User's Group, Inc.  
P.O. Box 8243  
Cranston, RI 02920 USA.
14. STAGS I and STAGS II  
Lockheed Palo Alto Research Laboratories  
Palo Alto, CA 94301 USA.

#### 6.3.8. Registros y bibliografías

1. Nash, W.A., Bibliography of shells and shell-like structures, David Taylor Model Basin Report 863, U.S. Navy Dept., Washington, D.C. (1954); also Bibliography of shells and shell-like structures 1954-1956, Reports, Dept. of Eng. Mech., Eng. & Ind. Exp. Stn., University of Florida (1957).
2. Naghdi, P.M., "A survey of recent progress in the theory of thin elastic shells", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 9 (1956).
3. Oniashvili, O.D., "Analysis of shells and some thin-walled spatial structures", Chapter 5 of *Structural mechanics in the USSR 1917-1957* (trad. del ruso), G. Herrman, ed., Pergamon Press (1960).
4. Nash, W.A., "Recent advances in the buckling of thin shells", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 13, No. 3 (1960).
5. Naghdi, P.M., "Foundations of elastic shell theory", in *Progress in solid mechanics*, I.N. Sneddon & R. Hill, eds., North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1963), vol. IV, chapter 1.
6. Habip, L.M., "A survey of modern developments in the analysis of sandwich structures", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 18, No. 2 (1965).
7. Kalins, A., "Dynamic problems of elastic shells", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 18, No. 11(1965).
8. Hutchinson, J. W. and W. T. Koiter, "Postbuckling theory", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 23, (1970).

9. Naghdi, P.M., "The theory of shells and plates", *Handbuch der Physik* vol. VI a/2, W. Flügge, ed., Springer-Verlag, Berlín (1972), pp. 425-640.

### 6.3.9. Normativa de láminas

1. Instructions for design of reinforced concrete roofs (en ruso), Academy of Construction and Architecture of USSR, Moscow (1961).

2. Indian Standard IS: 2210-1962, Criteria for the design of reinforced concrete shell structures and folded plates, Indian Standards Institution, Manak Bhavan. New Delhi (1963); traducido al turco, Mimarlik Fakültesi Ankara, Yavin No. 22 (1974).

3. New Zealand Standard Specification NZSS 1826:1964, Design and construction of shell roofs. New Zealand Standard Institute, Wellington (1964).

4. American Concrete Institute Committee 334, "Concrete shell structures — practice and commentary", *Journal of the ACI*, vol. 61 (1964), pp. 1091-1108.

5. American Concrete Institute Standard 318-77, *Building code requirements for reinforced concrete; also Commentary 318-77C*. American Concrete Institute, Detroit, Michigan (1977).

6. *Report 50, Shell Roofs* (en holandés), CUR, Commissie voor uitvoering van research ingesteld door de betonvereniging, Zoetmeer, The Netherlands (1972).

\* \* \*

### **Celebración, en España, del III Simposio Internacional de la F.I.P. sobre "Corrosión bajo tensión de aceros de pretensado" y de la reunión anual de la Comisión de la F.I.P. de "Aceros y Sistemas de Pretensado"**

Durante los días 22 y 23 del pasado mes de setiembre, tuvo lugar en el Hotel Victoria Palace, de San Lorenzo de El Escorial, el III Simposio Internacional de la F.I.P. sobre "Corrosión bajo tensión de aceros de pretensado". El Comité Organizador estaba constituido por D. Francisco Arredondo, D. José Calavera, D. Manuel Elices, D. Rafael Piñeiro y D. Vicente Sánchez Gálvez.

Se celebraron cuatro Sesiones de Trabajo para el estudio y difusión de los siguientes temas: "Fallos debidos a la corrosión bajo tensión"; "Mecanismos de la corrosión bajo tensión"; "Métodos de ensayo", y "Medidas de protección". Dichas Sesiones fueron presididas, respectivamente, por el Dr. Ing. U. Nurnberger, de la Universidad de Stuttgart (república Federal Alemana); Prof. I.M. Bernstein, de la Universidad de Carnegie-Mellon (Estados Unidos); Dr. Ing. M. Brachet, de Lab. Central des Ponts et Chaussées, de París, y Prof. R.N. Parkins, de la Universidad de Newcastle (Inglaterra).

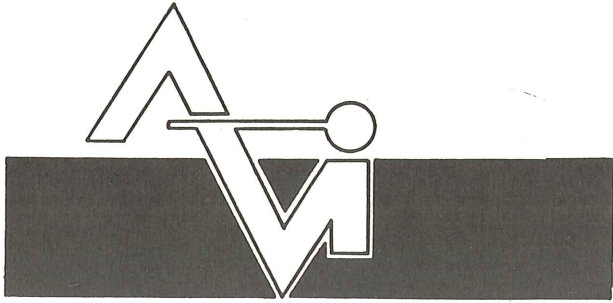
Se presentaron veinticuatro comunicaciones por varios de los cuarenta y cinco asistentes al Simposio, todos ellos especialistas en el tema y procedentes de distintos países del mundo, con lo que se alcanzó un elevado nivel en las discusiones y un gran avance en el conocimiento del problema.

En la tarde del día 22, los asistentes realizaron una visita al Valle de los Caídos, siendo invitados a continuación, por la Asociación Técnica Española del Pretensado (A.T.E.P.), a una cena en la Hospedería.

Posteriormente, durante los días 24 y 25, y también en el Hotel Victoria Palace de San Lorenzo de El Escorial, tuvo lugar la reunión anual de la Comisión de "Aceros y sistemas de pretensado", de la F.I.P., presidida por el Prof. Dr. Ing. A.S.G. Bruggeling, con asistencia de treinta de sus Miembros, siendo ésta la primera vez que la referida Comisión se reunía en España.

En la tarde del 24, los asistentes giraron visita al Monasterio, invitados por el Ayuntamiento de San Lorenzo de El Escorial y, seguidamente, fueron agasajados, por UNESID, con una cena en un restaurante típico de la población.





PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**FABRICAS:**

HUESCA: Paseo Lucas Mallada, s/n. - Teléfono 22 39 00 (cinco líneas). (Casa central.)

MONZON: Carretera de Lérida - Teléfono 40 07 80.

GRAÑEN: Carretera de Huesca - Teléfono 27.

MADRID: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68.

ZARAGOZA: Avda. de Marina Moreno, 31 - Teléfono 23 75 02 3. (Comercial zona norte.)

MADRID: Carretera de Torrejón a Loeches, Km. 4,200 - Teléfono 675 04 50. TORREJON DE ARDOZ.

Fábricas: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68. GETAFE.

Oficinas: Orense, 10 - Teléfono: 455 05 35/6/7. MADRID-20.

## **Estudio sobre tableros de puentes Parte III.— El puente curvo**

**Por Francisco Javier Manterola Armisen  
Prof. Dr. Ingeniero de Caminos**

### **SINOPSIS**

El presente artículo es continuación de los que, con el título general de “Estudio sobre tableros de puentes”, han sido publicados en los números anteriores, 138 y 139, de “Hormigón y Acero”.

En la primera parte, el Autor estudiaba los tableros de vigas y, en la segunda, los tableros de sección en cajón. En el presente artículo se ocupa del puente curvo.

Se analiza primero la viga curva, ya que representa la célula elemental que sirve de punto de partida para llegar al conocimiento de la forma de comportarse el puente curvo. Se pasa después al puente losa y, seguidamente, al de sección en cajón, prestándose especial atención a la distorsión natural que la curvatura proporciona a estos tipos de tableros. Finalmente, se hace un repaso de los distintos procedimientos que se utilizan para el cálculo de los puentes curvos, y un juicio crítico de los mismos.

Este estudio sobre tableros de puentes, se continuará en el próximo número de “Hormigón y Acero”.

### **INTRODUCCION**

La curvatura en planta de los tableros de puente, determina un modo particular de comportamiento resistente. Introduce una variable nueva, la cual, junto con la relación ancho-luz y la distribución de rigideces dentro del tablero, determina los mecanismos de resistencia que desarrolla la estructura para hacer frente a las acciones exteriores.



Para penetrar en la respuesta resistente del puente curvo, necesitamos tratar, en primer lugar, de la viga curva cargada normalmente a su plano, analizando la influencia que en su respuesta tiene la curvatura en planta y la relación de rigideces a flexión y torsión. Y esto es así porque la viga curva representa la célula elemental de la cual debemos partir para entender el puente curvo.

Trataremos, en segundo lugar, del tablero losa, para poder analizar el comportamiento conjunto de una serie de elementos longitudinales y transversales.

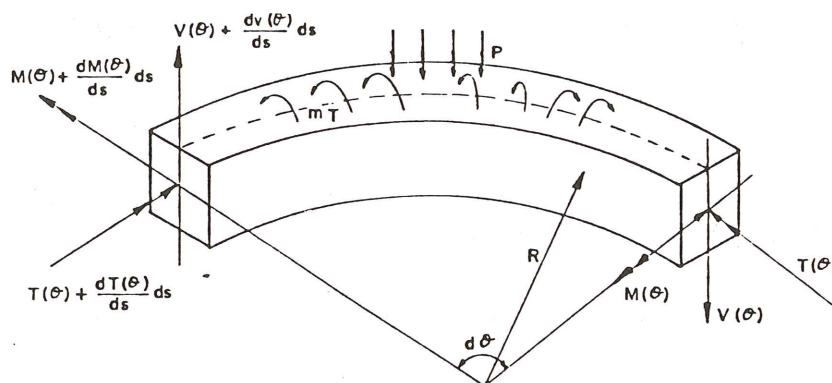
La sección cajón la trataremos en tercer lugar, haciendo hincapié en la distorsión natural que proporciona la curvatura a este tipo de tableros.

Por último daremos un repaso rápido a los distintos procedimientos utilizados para el cálculo de este tipo de puentes. El desarrollo de estos procedimientos no será completo, pues muchos de ellos no son sino una aplicación de los procedimientos generales de cálculo de estructuras a este tipo de puentes. Otros, están adecuadamente desarrollados en otras publicaciones específicas de cálculo. Por último, a otros, no más importantes sino más específicos para este tipo de puentes, se les dedicará un poco más de atención.

## 1. La viga curva

Supongamos una viga curva, circular, en la que se cumplan las siguientes condiciones:

a) La sección transversal es pequeña comparada con la luz de la viga, de manera que



$$\frac{dT(\theta)}{ds} = \frac{M(\theta)}{R} + m_T \quad (1)$$

$$\frac{dM(\theta)}{ds} = -\frac{T(\theta)}{R} - V(\theta) \quad (2)$$

$$\frac{dV(\theta)}{ds} = P \quad (3)$$

Fig. 1.1.

las propiedades elásticas puedan suponerse concentradas a lo largo del centro de gravedad de la viga.

b) La sección transversal no distorsiona transversalmente.

c) Las secciones permanecen planas.

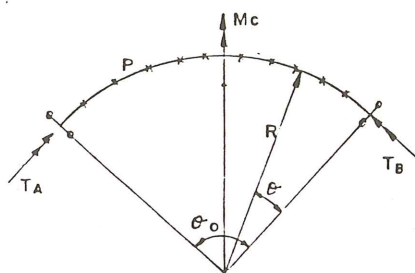
Estas propiedades las cumplen sobradamente las secciones macizas de las vigas elementales. En tableros de puente, lo cumplen las secciones cajón de muy pequeña relación ancho/luz, o aquellas otras en las que, aún siendo ésta significativa existe suficiente número de vigas riostras lo bastante próximas para que la distorsión pueda despreciarse. Las secciones abier-

tas, aún las bien arriostradas, desarrollan una capacidad de resistencia a la torsión en la que interviene, además de la torsión de Saint Venant, la torsión no uniforme, que desarrolla un alabeo significativo con lo que se transgrede la condición c).

Suponemos que la viga está cargada normalmente a su plano por una serie de cargas  $P$  y unos pares torsores  $m_t$ . Las ecuaciones de equilibrio son las que se indican en la figura 1.1.

De estas ecuaciones\* se deduce una propiedad importante. En las vigas curvas, al contrario de lo que ocurre en las vigas rectas, los momentos flectores y torsores están acoplados.

La vinculación más simple en los apoyos de una viga curva para que no sea inestable es: empotramiento a torsión y apoyo a flexión. En este caso, la viga sólo tiene una incógnita hiperestática, salvo para carga vertical uniforme, para la cual resulta isostática. La resolución de este estado de carga se indica en la figura 1.2; y la respuesta completa, para una determinada viga, en esfuerzos y corrimientos, en la figura 1.3.



$$T_A = -T_B = PR^2 \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{1 - \cos \theta_0}{\text{sen} \theta_0} \right)$$

$$M_c = PR^2 \left( \frac{1}{\cos \theta_0 / 2} - 1 \right)$$

$$M_\theta = PR^2 \left( \frac{\text{sen}(\theta_0 - \theta) + \text{sen} \theta}{\text{sen} \theta_0} - 1 \right)$$

$$T_\theta = PR^2 \left( \frac{\theta_0}{2} - \theta - \frac{\cos(\theta_0 - \theta) - \cos \theta}{\text{sen} \theta_0} \right)$$

Fig. 1.2.

De ella podemos sacar las siguientes conclusiones:

- 1.- La ley de momentos flectores longitudinales es muy parecida a la que existe en una viga recta de luz igual al desarrollo de la viga curva (Fig. 1.4).
- 2.- Bajo cargas verticales, al contrario de lo que pasa en las vigas rectas, la viga curva está sometida a unos momentos torsores significativos; lo que produce giros de torsión en la deformada de la viga (Fig. 1.3 c, e y f).
- 3.- Aunque los esfuerzos se mantienen constantes cualesquiera sean las características elásticas de la viga, los corrimientos, tanto los giros como los desplazamientos verticales, dependen de las rigideces a flexión  $EI$ , y a torsión  $GJ$  (Fig. 1.5).

En el caso de que la viga curva está empotrada, la viga es hiperestática. La aparición de un momento flector,  $M_f$ , en el extremo, determina los siguientes fenómenos:

- 1.- La ley de momentos flectores longitudinales, cambia de manera similar a como lo hacen las vigas rectas y con valores prácticamente iguales (Fig. 1.3 b).
- 2.- Los momentos torsores disminuyen mucho. Ello se debe a que la componente del momento flector proyectada sobre el eje  $x$ , ayuda al momento torsor a resistir la excentricidad de la carga (Fig. 1.3 c).
- 3.- Las flechas y los giros de las cargas, disminuyen de una manera importante (Fig. 1.3 g).

### 1.1. Influencia de la relación $K = EI/GJ$

El acoplamiento que existe entre los momentos flectores y torsores, hace que tome

\* En el apéndice 1 se incluye la solución de los esfuerzos de la viga curva para un conjunto de casos particulares, así como un procedimiento simplificado de cálculo.



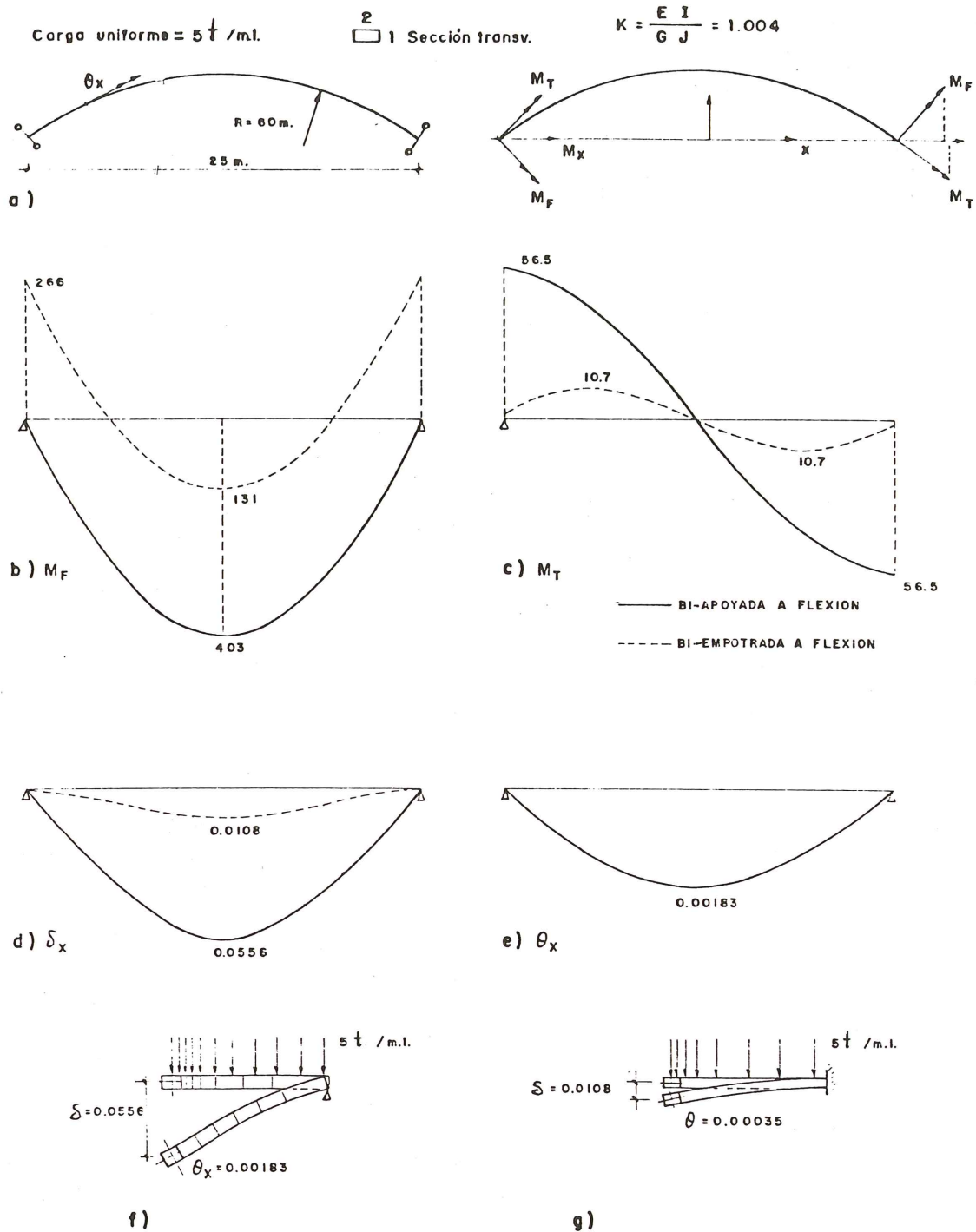


Fig. 1.3. Respuesta de una viga curva bajo carga uniforme. a) Planta de la viga. b) Ley de momentos flectores. c) Ley de momentos torsores. d) Corrimientos verticales. e) Giros  $\theta_x$ . f) Corrimientos, en el centro, en la viga apoyada. g) Corrimientos, en el centro, en la viga empotrada.

un valor importante la relación  $K$  entre las rigideces a flexión y torsión.

En estructuras isostáticas, (Fig. 1.5), la reducción de la rigidez a torsión, determina un incremento muy importante de los corrimientos verticales y, sobre todo, del giro torsional de la viga. En este caso, los esfuerzos no varían ya que la estructura es isostática; pero

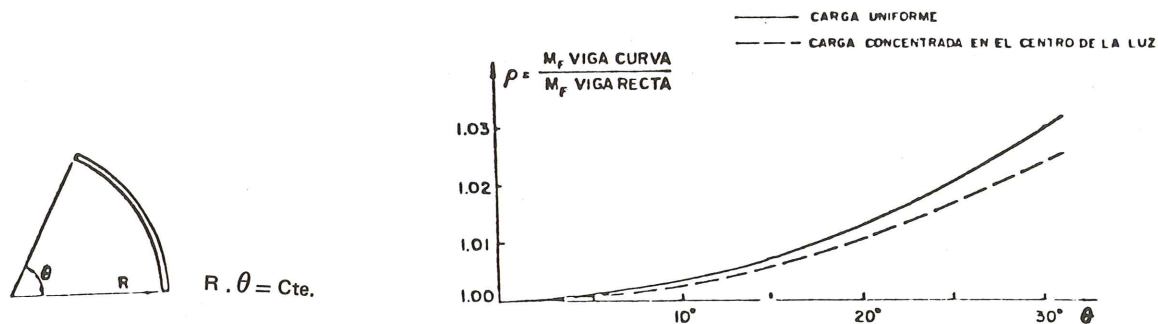


Fig. 1.4. Momentos flectores, en el centro de la luz, para carga uniforme.

en el caso de las estructuras hiperestáticas, la variación del valor K determina un cambio importante en la cuantía de los esfuerzos. En las figuras 1.6 a y b, vemos la variación de los esfuerzos de empotramiento de una viga curva bajo carga uniformemente repartida, cuando variamos el valor de K y el ángulo que abarca la curva. De estas curvas se saca una conclusión importante: conforme va siendo mayor el valor de K, mayores esfuerzos de flexión y torsión tiene la viga. En la figura 1.6 c, se ve la variación del momento torsor, a lo largo de una viga curva, cuando varían las condiciones de apoyo y la relación K.

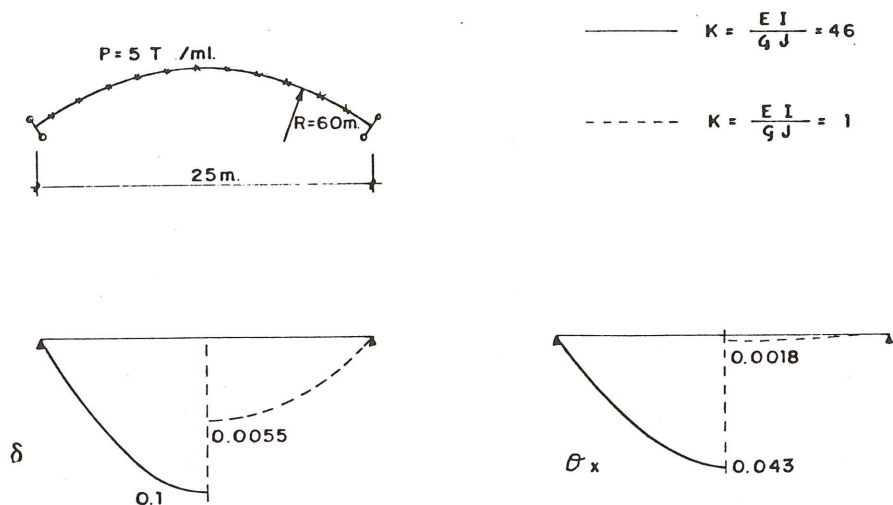


Fig. 1.5. Viga isostática. Influencia de la variación de rigidez torsional en los corrimientos.

En la figura 1.7 vemos la respuesta de una viga continua de tres vanos, cuando se varía el radio de curvatura y el valor K.

Para valores de K pequeños, correspondientes a secciones de gran rigidez a torsión (Fig. 1.7 a), los momentos flectores se mantienen prácticamente iguales a los de una viga continua recta, aunque variemos el radio de curvatura en planta de la viga. Los momentos torsores (Fig. 1.7 c), varían en función de la curvatura en planta.

Si reducimos la rigidez torsional, el valor de K aumenta; y en el caso que estamos considerando lo aumentamos 10 veces. En este caso, la ley de momentos flectores ya no se mantiene prácticamente igual a la de la viga recta, sino que cambia sustancialmente con la curvatura en planta de la viga (Fig. 1.7 b): Deben aparecer momentos flectores negativos, mayores, sobre los apoyos, para compensar la parte que la torsión no puede recoger. Los momentos torsores disminuyen (Fig. 1.7 d).



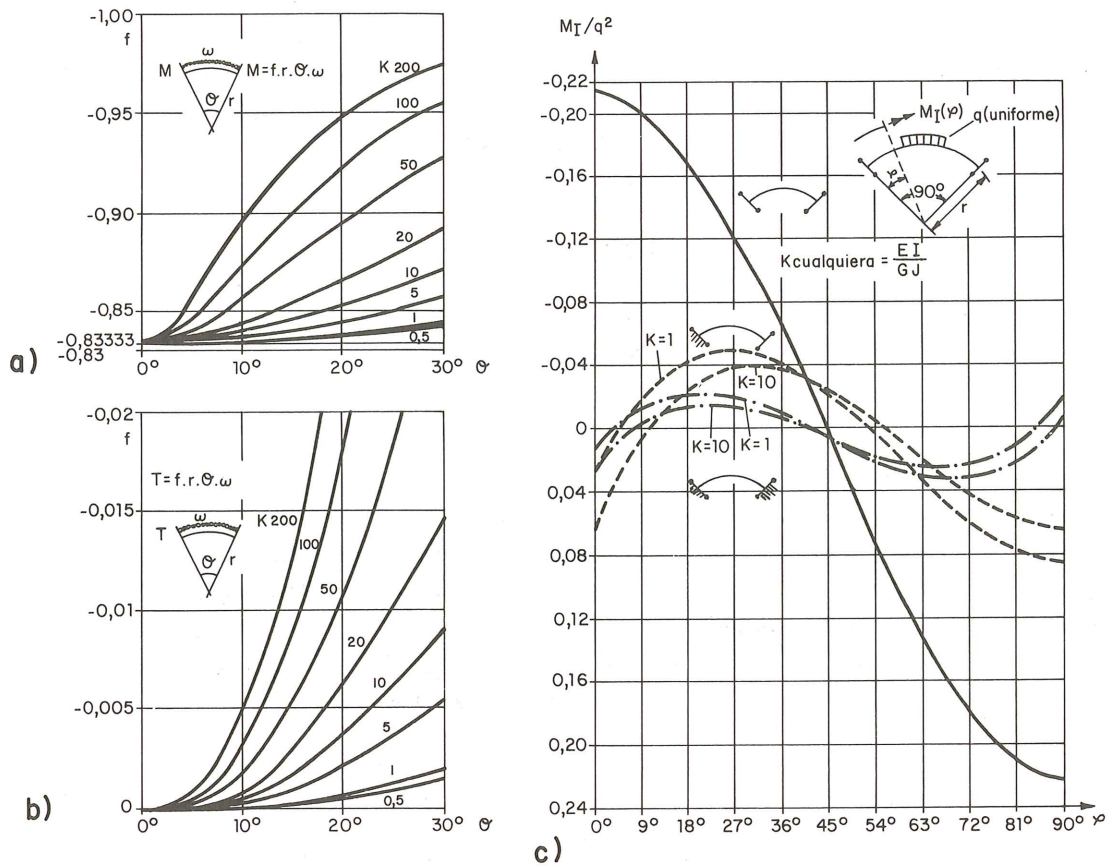


Fig. 1.6. a) Valores de los momentos flectores de empotramiento, para carga uniformemente repartida, en función de  $K$  y  $\theta$  (Sawko).  
 b) Valores del momento torsor de empotramiento en función de  $K$  y  $\theta$  (Sawko).  
 c) Valores del momento torsor de una viga curva, con ángulo de  $90^\circ$ , cuando se varía el coeficiente  $K$  y las vinculaciones de apoyo. (Leonhardt).

Este hecho, la variación de la cuantía de la flexión cuando disminuye la rigidez a la torsión, será de gran importancia en aquellos casos en que la viga curva sea hiperestática o forme parte de una estructura hiperestática, como por ejemplo un tablero curvo. La disminución de la rigidez a la torsión, ocurre también cuando sobrepasamos la fase de respuesta elástica de la viga y se produce la fisuración; entonces, la rigidez a la torsión disminuye mucho más rápidamente que la de flexión.

### 1.2. Variación de la curvatura en planta

Ya hemos visto, en la figura 1.7, cómo los efectos que produce la disminución de la rigidez a la torsión son tanto mayores cuanto mayor es la curvatura en planta de la viga. A fin de cuentas la curvatura es la variable desencadenante de esta manera particular de comportarse la viga curva.

En la figura 1.8 vemos la influencia de la curvatura en planta, en las vigas cargadas con cargas puntuales.

Cuando la carga puntual es vertical (Fig. 1.8, I), se observa que, tanto los momentos flectores y los desplazamientos verticales como los momentos torsores y los giros torsionales, aumentan conforme disminuye el radio de curvatura, siendo mucho mayor el aumento en el segundo grupo que en el primero.

Cuando la carga puntual es torsora (Fig. 1.8, II), se observa el mismo tipo de incremento con la curvatura; pero en este caso es mucho mayor el incremento en momentos flectores y descensos verticales, que en momentos torsores y giros.

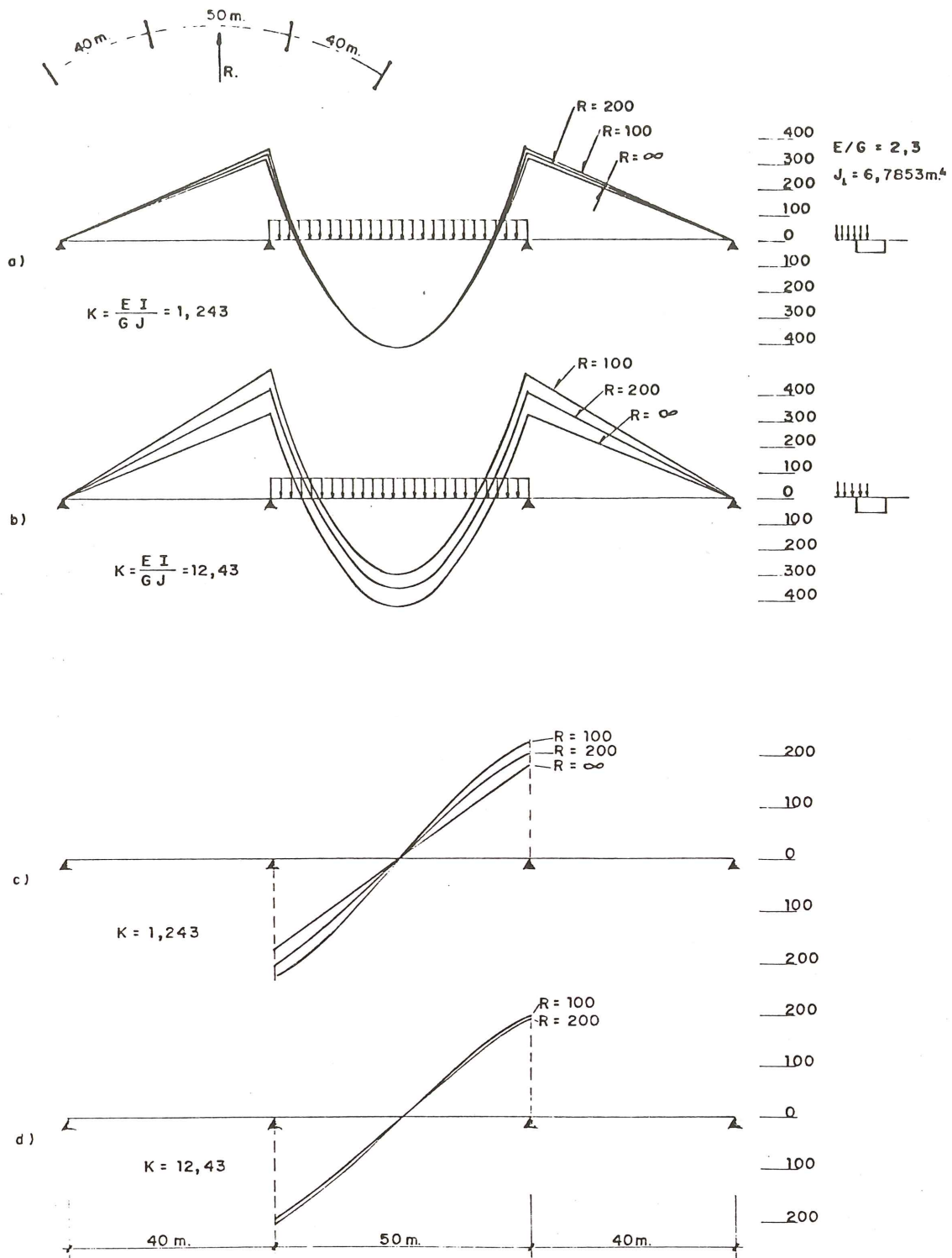


Fig. 1.7. Comparación entre vigas rectas y curvas.  
 a) y b) Ley de momentos flectores  
 c) y d) Ley de momentos torsores



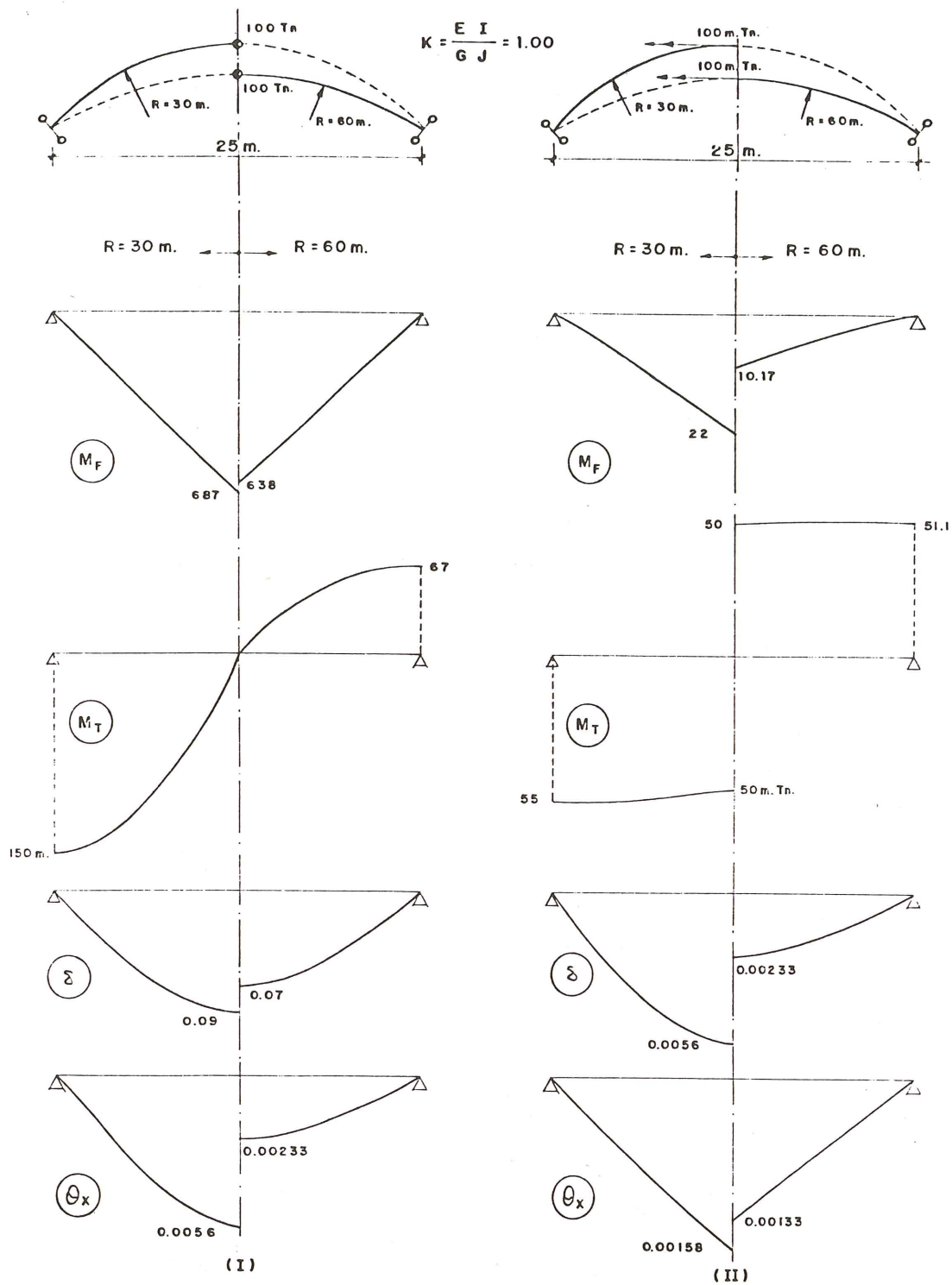


Fig. 1.8. Comparación entre la respuesta de una viga curva de  $R = 60 \text{ m}$ . y otra de  $R = 30 \text{ m}$ .

### 1.3. Conclusión respecto al comportamiento resistente de las vigas curvas

- 1.- Una viga curva isostática, cargada verticalmente, desarrolla momentos flectores y torsores de importancia. En su deformación, junto con corrimientos verticales se dan giros de torsión.

- 2.- La ley de momentos flectores longitudinales de una viga curva, para los casos en que el ángulo de abertura de la misma no es muy grande, es prácticamente igual a la de una viga recta de la misma longitud. Crece ligeramente cuando reducimos el radio de curvatura (Fig. 1.4).
- 3.- La reducción de la rigidez a torsión, aunque se mantenga la de flexión, determina en la viga isostática un incremento importante de los giros y las flechas verticales.
- 4.- El empotramiento a flexión de las vigas curvas, lleva consigo una disminución muy importante de los momentos torsores que solicitan la viga.
- 5.- El acoplamiento entre flexiones y torsiones, determina la importancia del papel desarrollado por  $K = (EI/GJ)$ . Cuando éste aumenta, como consecuencia de la disminución de la rigidez a la torsión, los momentos flectores longitudinales experimentan incrementos muy apreciables en vigas curvas continuas.

## 2. Tablero losa

Existe una diferencia clara entre el comportamiento de un tablero recto y un tablero curvo. Para una carga uniformemente distribuida actuando sobre un tablero de inercia constante, en el tablero recto no existe redistribución de esfuerzos. Cada viga longitudinal en que se podría abstraer el tablero, se lleva la carga que la solicita; mientras que para un tablero curvo en planta, existe una redistribución de esfuerzos. Ocurre lo mismo que en los tableros oblicuos; la geometría en planta determina un trabajo tipo superficial, incluso para las cargas uniformes.

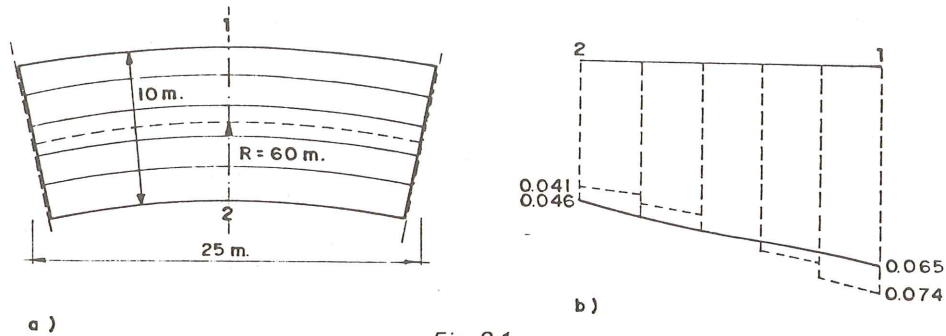


Fig. 2.1.

Supongamos el tablero curvo bi-apoyado de la figura 2.1a, solicitado por una carga uniformemente repartida de  $2,5 \text{ t/m}^2$ . En dicho tablero, destacamos cinco vigas curvas longitudinales, de  $2,00 \text{ m}$  de anchura, al realizar cuatro cortes circunferenciales.

Cada una de estas vigas curvas, solicitada por una carga uniforme, experimentará unos corrimientos y giros a lo largo de su trazado, cuyo valor en el centro de la luz lo representamos en la figura 2.1b con líneas de trazos. Las vigas situadas más lejos del centro de curvatura, tienen desplazamientos y giros mayores que las de menor radio de curvatura. La continuidad transversal de la losa, junto con las características elásticas de las vigas curvas, debe reconstituir la continuidad en la deformación total del tablero. La línea continua de la figura 2.1b, representa las deformaciones reales del tablero en el centro de la luz.

Los resultados de esta inter-acción entre trabajo longitudinal y transversal, lo representamos, en lo que se refiere a los esfuerzos, en la figura 2.2. En la columna I comparamos las leyes de momentos flectores del tablero (en  $2,00 \text{ m}$  de anchura), con las de las cinco vigas consideradas independientes. El resultado del trabajo conjunto del tablero, hace que en las



vigas más alejadas del centro de curvatura pierdan momento respecto a las independientes, y las más próximas lo ganen. Existe por tanto una redistribución transversal que tiende a igualar las flexiones a lo ancho del tablero.

En la columna II se representan las leyes de los momentos torsores en los dos casos, (losa y vigas independientes), viéndose una reducción de la cuantía de la torsión en todas las vigas, siendo más intensa en las exteriores. En la columna IV se representa la flexión transversal del tablero, a lo largo de las cinco secciones transversales.

Según estos resultados, parecería que el mecanismo de respuesta del tablero curvo es similar al del tablero recto, en cuanto que la zona más flexible (la exterior) transfiere carga vertical a la menos flexible (la interior) a través de la flexión transversal de la losa. Sin embargo esto no es así, lo que se comprueba si miramos la columna III, donde se representa el intercambio de carga vertical entre las cinco vigas curvas. La línea *a*, más flexible, recibe carga vertical del resto de la losa, mientras que la línea *e*, menos flexible, pierde carga; y esto en cantidades muy importantes, si tenemos en cuenta que la carga exterior que corresponde a cada una de estas líneas es de 5 t/ml. El mecanismo de reparto transversal es diferente.

Destaquemos una franja longitudinal, de 2,00 m de anchura, cuyo eje sea la línea *a* y veamos cuáles son las cargas que la solicitan en el tablero real:

- 1º) La carga vertical exterior, de 5 t/ml, que produce en el centro de la luz un momento flector de 459 m.t.
- 2º) Una ley de cargas verticales (Fig. 2.3a), introducidas por el resto de la losa, que producen en el centro de la luz un momento flector de 117,6 m.t., del mismo signo que el anterior.
- 3º) Una ley de cargas flectoras (Fig. 2.3b), introducidas por el resto de la losa, que producen en el centro de la luz un momento flector de -160,6 m.t.
- 4º) Una ley de cargas torsoras (Fig. 2.3c), introducidas por el resto de la losa, que producen en el centro de la luz un momento flector de -7,97 m.t.

La suma de estos cuatro momentos es de 408 m.t, que es el momento en el centro de la luz de la losa, en esa zona (Fig. 2.2).

Si examinamos ahora las deformaciones de la losa, veremos cuáles son los mecanismos de resistencia que se han desarrollado.

En primer lugar, fijémonos en el giro de flexión,  $\theta$ , Fig. 2.4.a, que experimentan las vigas curvas, consideradas independientes, en una misma sección radial. Debido a la distinta longitud de las vigas, estos giros serán diferentes, y su diferencia producirá una torsión en la viga radial AB. Si esta viga tiene una considerable rigidez a la torsión, tenderá a igualar ambos giros, introduciendo sobre las vigas curvas unos pares flectores, representados en la figura 2.3.b, cuya integración a lo largo de la viga curva da lugar a los mayores momentos de descarga. Este efecto es similar al que se produciría en una losa trapezoidal (Fig. 2.4.b).

En este primer mecanismo, se han enfrentado la rigidez a torsión de los elementos transversales y la de flexión de las vigas curvas.

El segundo mecanismo lo encontramos en el enfrentamiento entre la rigidez a flexión de las vigas transversales y la de torsión de las vigas curvas. Si comparamos lo que pasa con este mecanismo, en los tableros rectos, cargados excéntricamente, y en los curvos, veremos una diferencia fundamental.

Al cargar un tablero con carga excéntrica y si dividimos el tablero en un conjunto de vigas longitudinales, veremos que, bajo la carga diferente, cada una de las vigas desciende una determinada cantidad. Para reconstituir la carga transversal, los elementos transversales

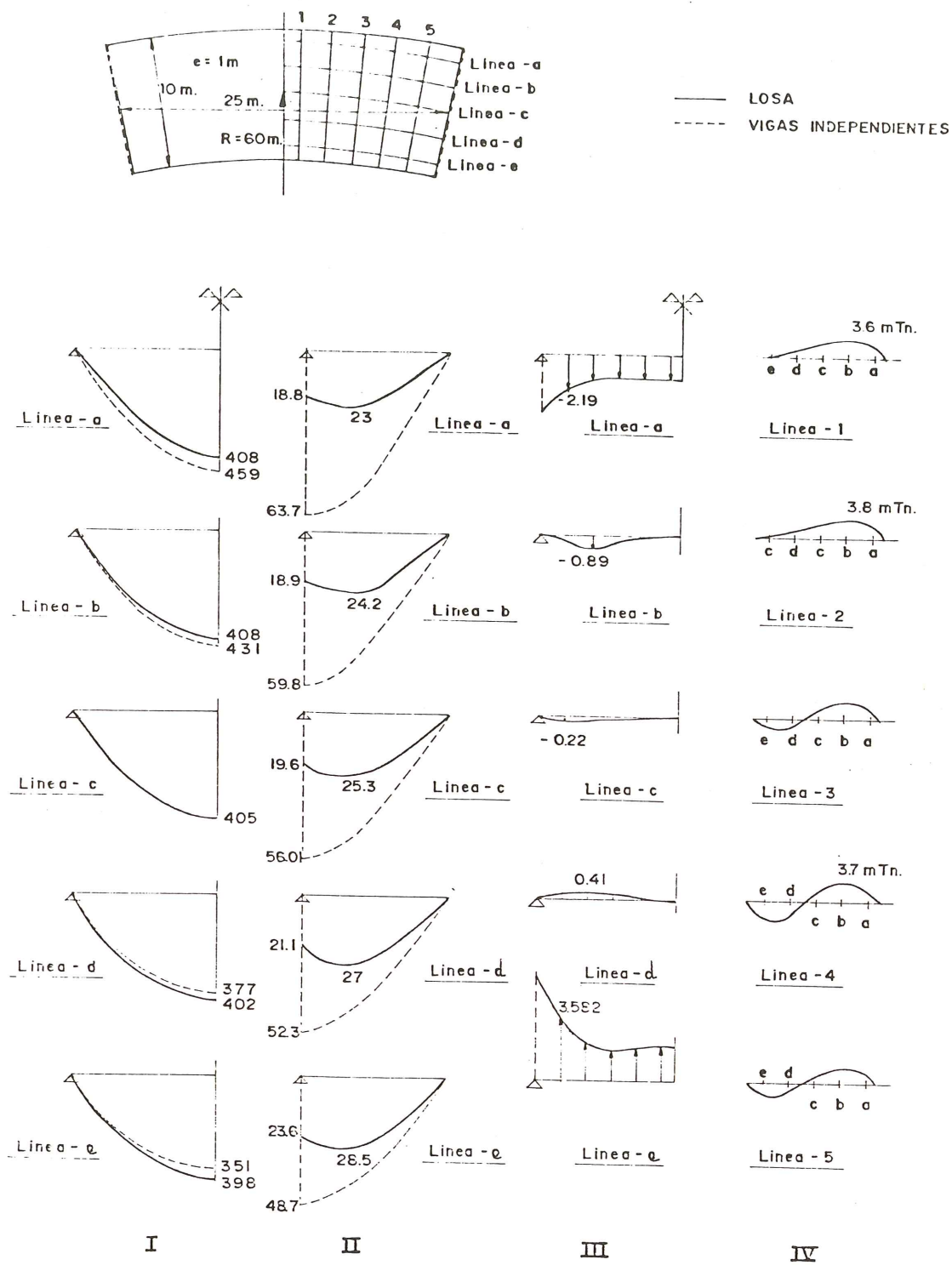


Fig. 2.2. Distribución de esfuerzos en un tablero circular Bi-apoyado ( $R = 60 \text{ m.}$ )  
 I.- Distribución de momentos flectores longitudinales.  
 II.- Distribución de momentos torsores.  
 III.- Leyes de descargas y cargas.  
 IV.- Momentos flectores transversales.



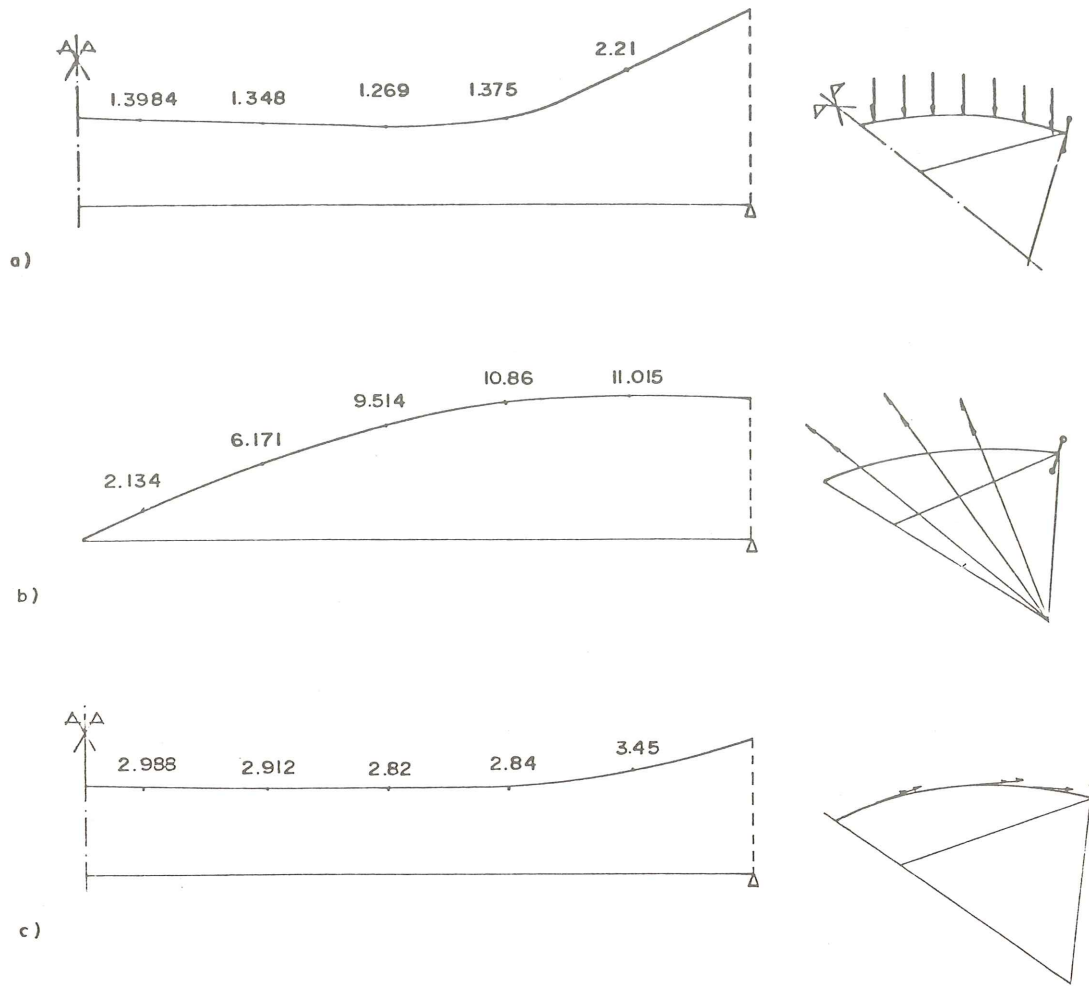
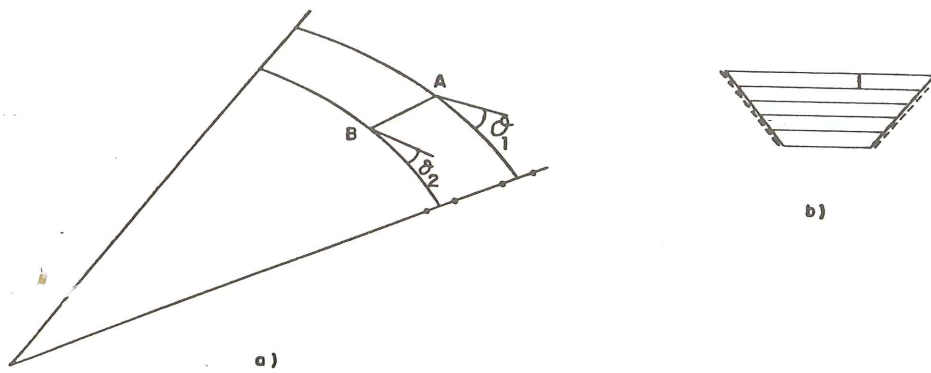


Fig. 2.3. Acciones del resto de la losa sobre la viga curva a.  
 a) Cargas verticales. b) Flexiones. c) Torsiones.



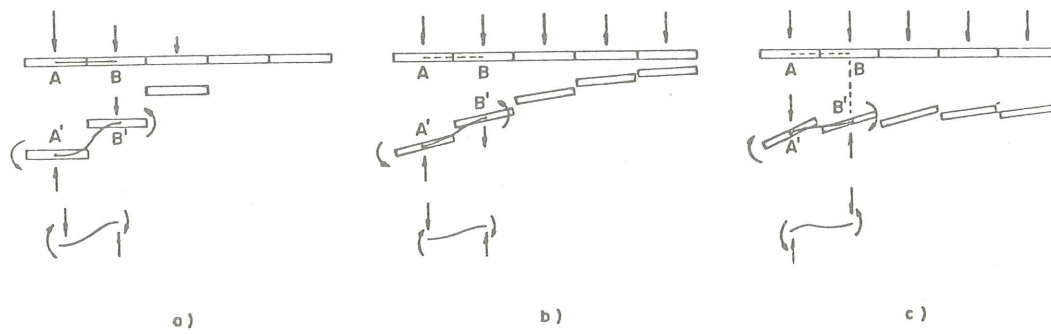


Fig. 2.5.

del tablero se deformarán, descargando la viga más cargada y cargando la menos cargada. Con este mecanismo se comienza el reparto transversal de cargas (Fig. 2.5.a).

Si el tablero es curvo, junto con el descenso de las vigas elementales aparecen los giros de torsión. La reconstitución de la losa transversal obliga a una deformación en esa dirección, mucho menor que si no existiesen esos giros (Fig. 2.5.b), e incluso de signo contrario si, por la poca rigidez a torsión de las vigas curvas longitudinales, la deformada de las vigas elementales es como la representada en la figura 2.5.c.

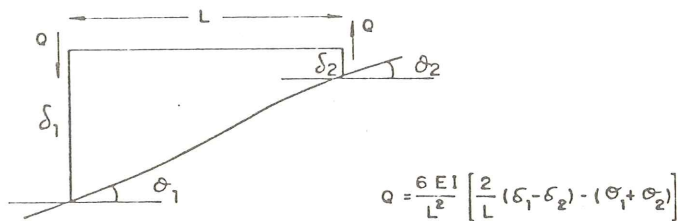


Fig. 2.6.

Depende del valor relativo de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , el que el valor que aparece en el extremo de la viga transversal cargue o descargue a las longitudinales (Fig. 2.6).

En el caso particular que estamos considerando, las vigas A y B producen, consideradas independientes, unos valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , cuya resultante  $Q$  tendería a cargar muy ligeramente la viga exterior y descargar la interior. Pero como este mecanismo de resistencia está acoplado con el primero, ocurre que la disminución de flechas que produce la carga flectora (Fig. 2.3.b), invierte el fenómeno haciendo que las cargas que se transmiten a la viga exterior sean del mismo signo que la carga exterior, como veíamos en la figura 2.2, columna III.

Si reducimos la rigidez torsional de las vigas curvas elementales, el fenómeno de traspaso de carga de la zona interior a la exterior será mucho más intenso, como luego veremos.

### 2.1. Comportamiento bajo cargas puntuales

Bajo cargas puntuales, los mecanismos de respuesta que desarrolla la losa para resistir, son los mismos que hemos comentado en el párrafo anterior; pero la intensidad de la sollicitación hace que el traslado de la sollicitación de una a otra zona de la losa sea diferente.



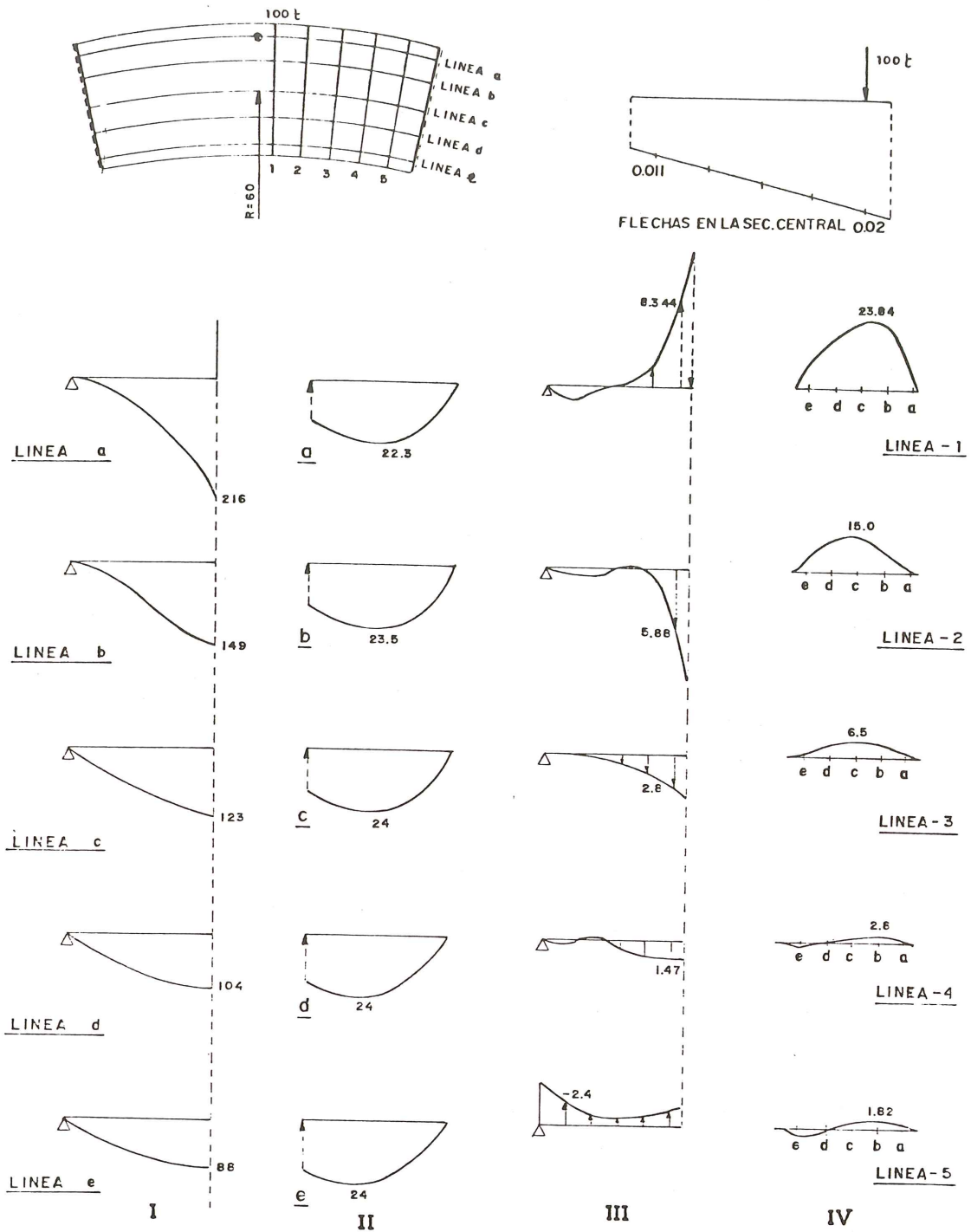


Fig. 2.7. Losa circular, bi-apoyada, bajo carga puntual.  
 I.-Leyes de momentos flectores longitudinales.  
 II.-Leyes de momentos torsores.  
 III.-Leyes de carga y descarga de las líneas longitudinales.  
 IV.-Leyes de momentos flectores transversales.

En la figura 2.7 representamos la respuesta de la misma losa circular que estamos estudiando, bajo una solicitación de 100 t. Vemos que los momentos flectores máximos se desarrollan bajo la zona cargada (216 m.t en la línea *a*, contra 88 m.t en la línea *e*). La flexión total, de 681 m.t, que tendría la línea *a* si actuase sola, se ha reducido drásticamente y redistribuido al resto de la losa.

En este caso, los corrimientos verticales y los giros de la zona cargada, considerada sola, son tan intensos que, al contrario de lo que pasa bajo la sobrecarga uniforme, la línea *a* se apoya en las demás, en lugar de recibir carga (Fig. 2.7.III). Este mecanismo es similar al que se produce en los tableros rectos, bajo carga puntual.

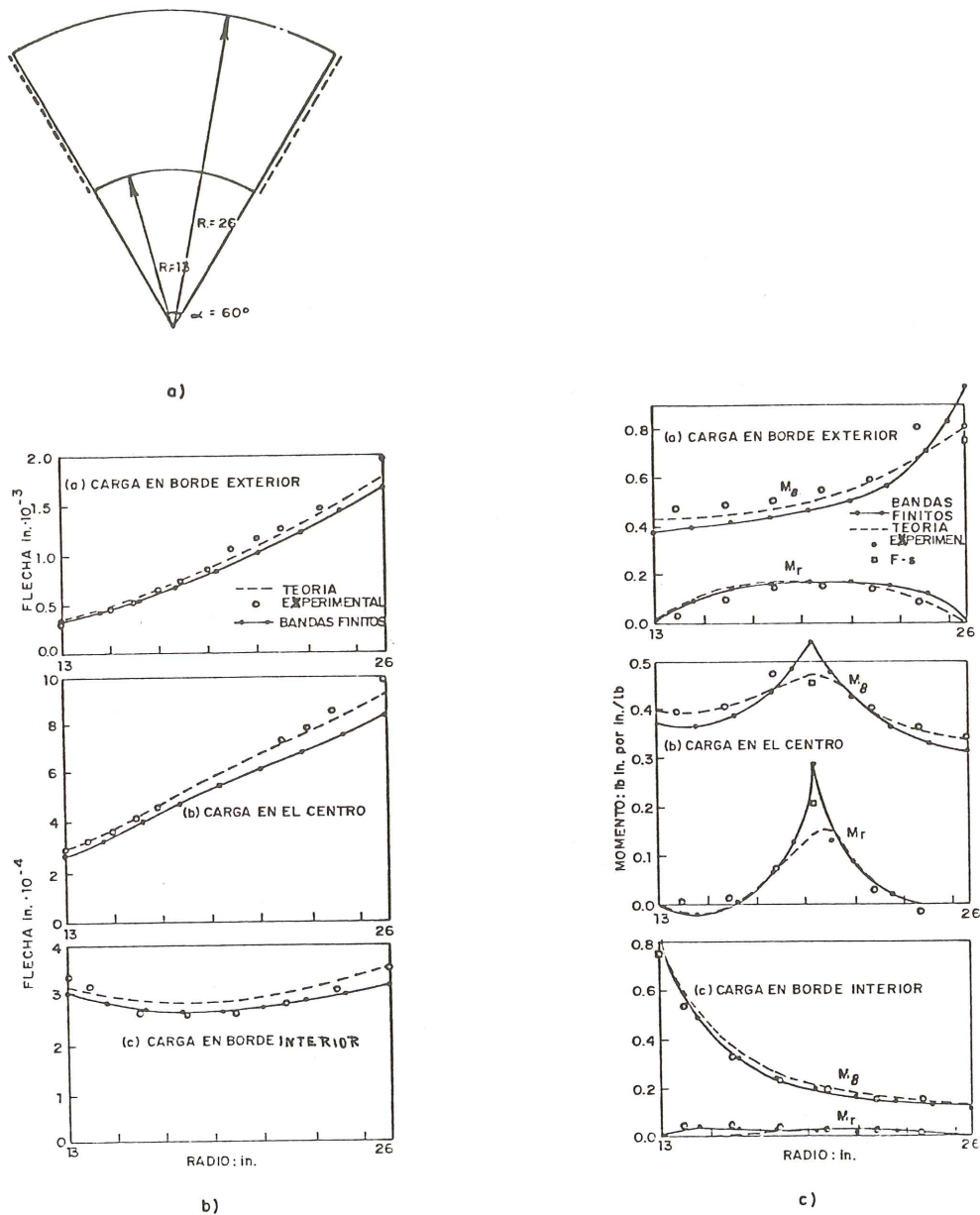


Fig. 2.8. (Y. K. CHEUNG)

Fig. 2.8. b) Distribución radial de flechas de la sección central debidas a carga unitaria en: (a) Borde exterior; (b) Centro; (c) Borde interior.

Fig. 2.8. c) Distribución de momentos flectores, radiales y tangenciales, en la sección central, debidos a carga en: (a) Borde exterior; (b) Centro; (c) Borde interior.



El mecanismo de torsión de los elementos transversales de la losa, se produce de una manera similar al caso de la carga uniforme.

En la figura 2.8 representamos la respuesta de un tablero curvo, con una gran relación ancho-luz, solicitado por tres cargas puntuales; una en el borde exterior, otra en el centro, y otra en el borde interior; y todas ellas en el centro de la luz.

Los corrimientos verticales (Fig. 2.8.b), destacan otro efecto importante:

- a) Cuando cargamos el borde exterior, las flechas son mucho mayores que cuando cargamos el interior, y su distribución central muy diferente.
- b) La redistribución de esfuerzos a lo largo de la losa es muy superior cuando cargamos el borde exterior que cuando cargamos el interior (Fig. 2.8.c).

Lo que ocurre es que la línea interior, por su mucha menor luz, es mucho más rígida que la exterior; y el mecanismo de reparto es excitado mucho menos en este caso que en el contrario. El mismo efecto se descubre si cargamos la línea central. Se ve que los momentos flectores longitudinales son mayores en la línea interior que en la exterior, y ambos menores que en el centro, que es el punto donde se carga.

## 2.2. *Influencia de la variación de las rigideces, en el comportamiento del tablero curvo*

En el punto anterior hemos examinado los mecanismos de respuesta de un tablero circular, de 60 m de radio medio, y una distribución de rigideces correspondiente a la losa isótropa. Para analizar la influencia de la distribución de rigideces en la respuesta, hemos elegido el mismo tablero en planta, con la misma carga y vinculaciones extremas, pero distinta distribución de rigideces.

Como sección transversal hemos elegido una sección nervada, de cinco vigas, que tiene la misma rigidez a flexión longitudinal que la losa isótropa del apartado anterior, pero en la que, evidentemente, disminuye la rigidez a torsión.

Transversalmente, hemos estudiado tres casos. En primer lugar, el tablero con diez vigas riostras, colocadas según las líneas 1, 2, 3, 4, 5 y sus simétricas, y de las mismas características que las longitudinales, es decir, de escasa rigidez a torsión. En segundo lugar, el mismo tablero, pero sin vigas riostras transversales. Por último, el tablero con diez vigas riostras pero, en este caso, con la rigidez a torsión que le correspondería a la losa maciza.

Los resultados de este análisis son muy variables. En la figura 2.9.a, representamos las distribuciones de momentos flectores en las cinco vigas del primer caso, comparándolas con las que se producirían en las cinco vigas separadas. En ellas se ve cómo la viga exterior resulta mucho más solicitada que si estuviese sola; al contrario de lo que pasa con la interior.

La razón de este comportamiento se entiende claramente si repasamos los mecanismos de resistencia vistos en el apartado 2. Aquí se ha disminuido extraordinariamente la eficacia del primer mecanismo de resistencia, al reducir la rigidez a torsión de las vigas transversales. Queda, por tanto, únicamente el segundo mecanismo que, como veíamos, trasladaba la carga de la zona interior a la exterior; razón ésta que justifica el enorme incremento de la flexión en las vigas exteriores y su reducción en las interiores.

Cuando reducimos la rigidez a flexión transversal, las cosas no cambian mucho (véase Fig. 2.9.b); siguen las vigas exteriores cargándose y las interiores descargándose.

En cambio, si potenciamos el primer mecanismo resistente dando rigidez torsional a las vigas riostras transversales, (Fig. 2.9.c), las leyes de momentos vuelven a ser casi iguales a las de la losa isótropa, cosa que no nos debe extrañar pues, como vimos en el apartado 2, éste es el mecanismo más eficaz para la reducción de la flexión en las vigas exteriores.

Este estudio demuestra la importancia que en el comportamiento como puente curvo tiene la rigidez a torsión de los elementos transversales, y la mala disposición estructural que es el tablero de vigas. En este caso, ante la falta de rigidez a torsión de las vigas longitudinales, el tablero se comporta girando hacia las vigas más flexibles, bajo la influencia de la torsión general que supone la carga exterior. El tablero desarrolla su rigidez a torsión, por el par que se crea entre las distintas vigas longitudinales, cargándose las exteriores y descargándose las interiores.

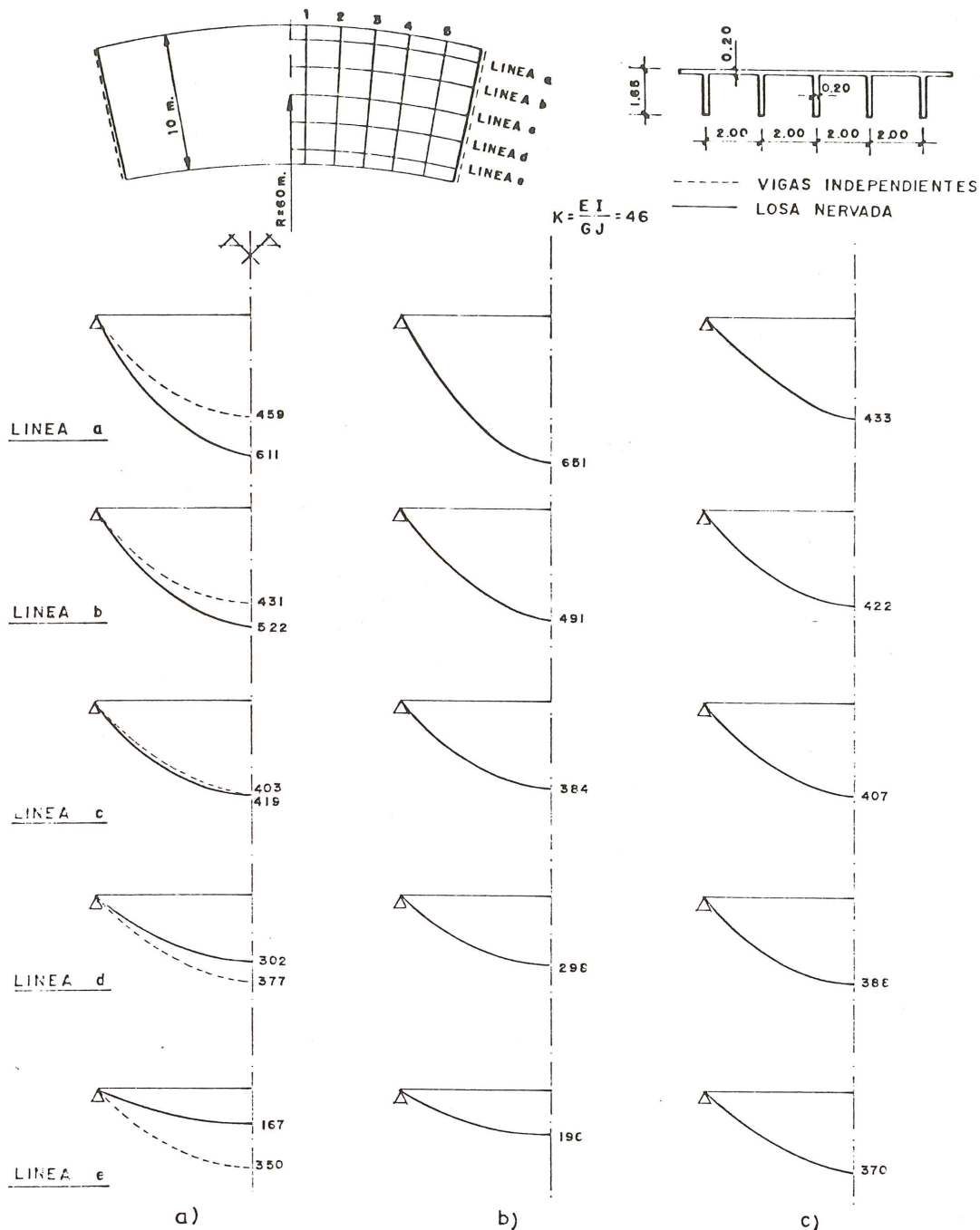


Fig. 2.9. Variación de la ley de momentos flectores longitudinales, en función de las características de la losa.  
a) Losa nervada, con vigas riostras según las líneas 1, 2, 3, 4, 5.  
b) Losa nervada, sin vigas riostras.  
c) Losa nervada, con vigas riostras de gran rigidez torsional.



Este fenómeno sería menos importante si dotásemos de rigidez a torsión a las vigas longitudinales, aunque las vigas transversales no la tuviesen.

### 2.3. *Influencia de las coacciones en los extremos*

El empotramiento en los bordes extremos de la losa circular de la figura 2.2, determina una reducción drástica de los corrimientos de las vigas elementales que se pueden destacar de la losa. Los corrimientos verticales, los giros de torsión y los de flexión son mucho más pequeños; y por tanto también lo es la diferencia entre los que se producen en las distintas vigas longitudinales.

Los dos mecanismos de resistencia en que hemos basado la respuesta de un tablero curvo son excitados, por tanto, en mucha menor amplitud que en el caso de vigas apoyadas; lo que determina una reducción brusca del intercambio de esfuerzos.

El empotramiento hace el mismo papel en tableros curvos que en tableros rectos: reduce extraordinariamente el intercambio transversal de esfuerzos.

En la figura 2.10.I, representamos la comparación entre los momentos flectores longitudinales en las cinco vigas independientes y en el tablero real. Como se ve la diferencia es mínima, si bien se puede apreciar claramente el mismo tipo de comportamiento que observábamos en los tableros bi-apoyados, aunque mucho más reducido.

Los momentos torsores también se reducen, aunque en mucha menor proporción (Fig. 2.10.II).

La cantidad de carga vertical que la línea *a* recibe del resto de la losa, (figura 2.10.III), sigue la pauta indicada anteriormente: carga en la zona de momentos flectores positivos y descarga en la zona de momentos negativos.

### 2.4. *Relación ancho-luz*

En el apartado 2.1 hemos visto la enorme influencia que en el reparto ha supuesto una gran relación ancho-luz, cuando la solicitamos por una carga puntual, ya sea situándola en un borde, en el otro o en el centro de la luz.

Si redujésemos la relación ancho-luz al mínimo, estaríamos en el caso de una viga curva, para la cual el momento es constante a todo lo ancho. Esto quiere significar la enorme influencia que la relación ancho-luz ejerce en el comportamiento de un tablero curvo.

Está además muy influenciado por la curvatura en planta de la losa. Para puente recto,  $R = \infty$ , el reparto transversal depende sólo de las características elásticas de la losa, y además, claro está, de la relación ancho-luz. Conforme reducimos el radio de curvatura, introducimos en el reparto una variable nueva que es la reducción de la flexibilidad de una zona de la losa respecto de la otra, produciendo esta variable los efectos que conocemos.

Bajo una sobrecarga uniforme (Fig. 2.11), representamos la influencia de la relación ancho-luz, comparándola con la de las zonas correspondientes de losa, consideradas independientes por cortes circulares. En todas ellas se ve como se equilibran los momentos flectores de las vigas individuales, por la entrada en juego de los mecanismos de respuesta que ya conocemos. Los resultados no son espectaculares, ya que la sobrecarga está uniformemente repartida.

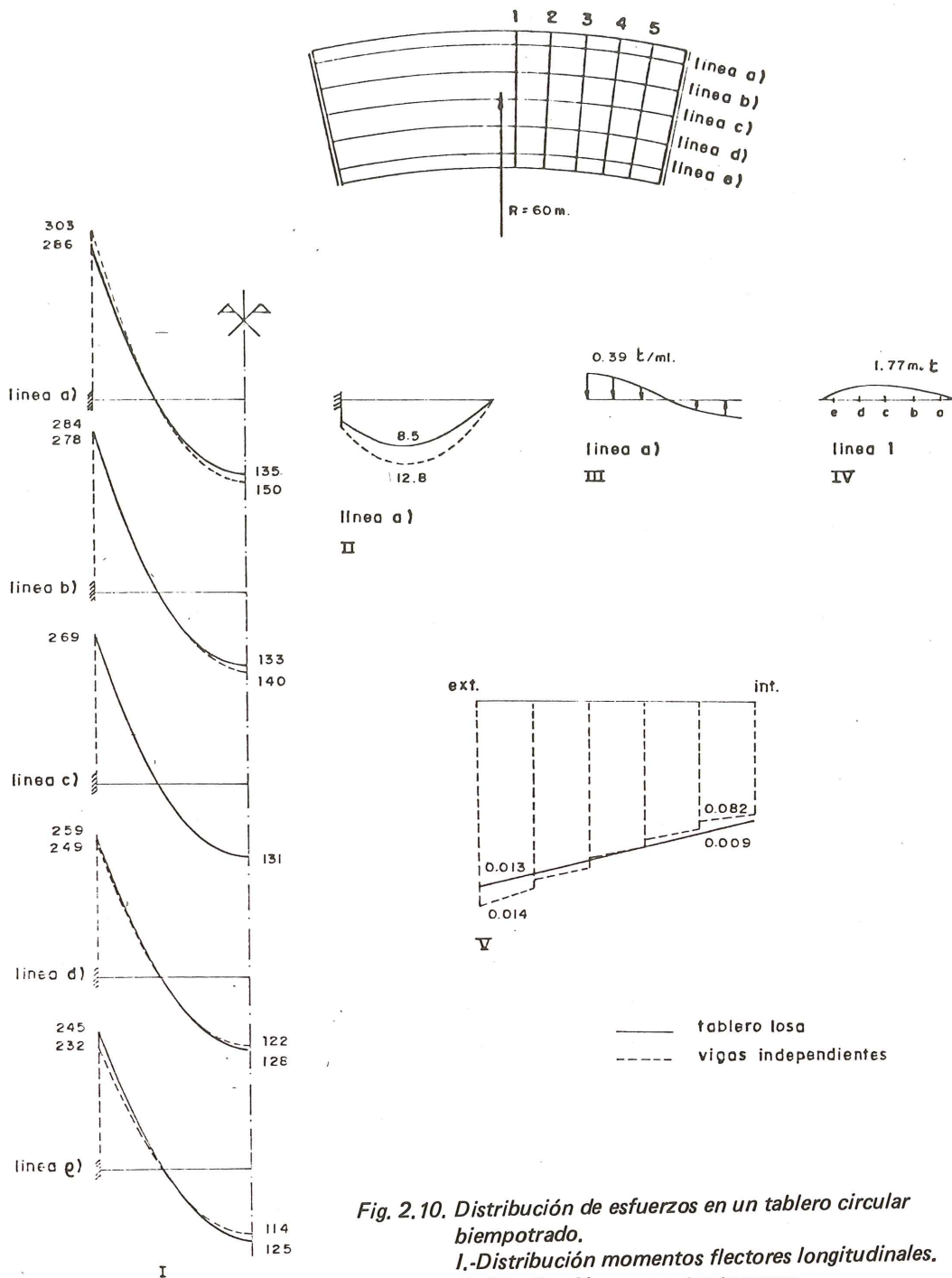


Fig. 2.10. Distribución de esfuerzos en un tablero circular biempotrado.  
 I.-Distribución momentos flectores longitudinales.  
 II.-Distribución momentos torsores.  
 III.-Acciones verticales del resto del tablero sobre línea a.  
 IV.-Momentos flectores transversales.  
 V.-Flechas verticales en el centro de la luz.

### 2.5. Variación del radio de curvatura

En la figura 2.12 representamos los esfuerzos que se producen en el mismo tablero de la figura 2.2, pero en el que se ha variado su radio de curvatura, pasando de 60 m a 200 m. Este aumento del radio de curvatura minimiza todos los problemas que hemos examinado



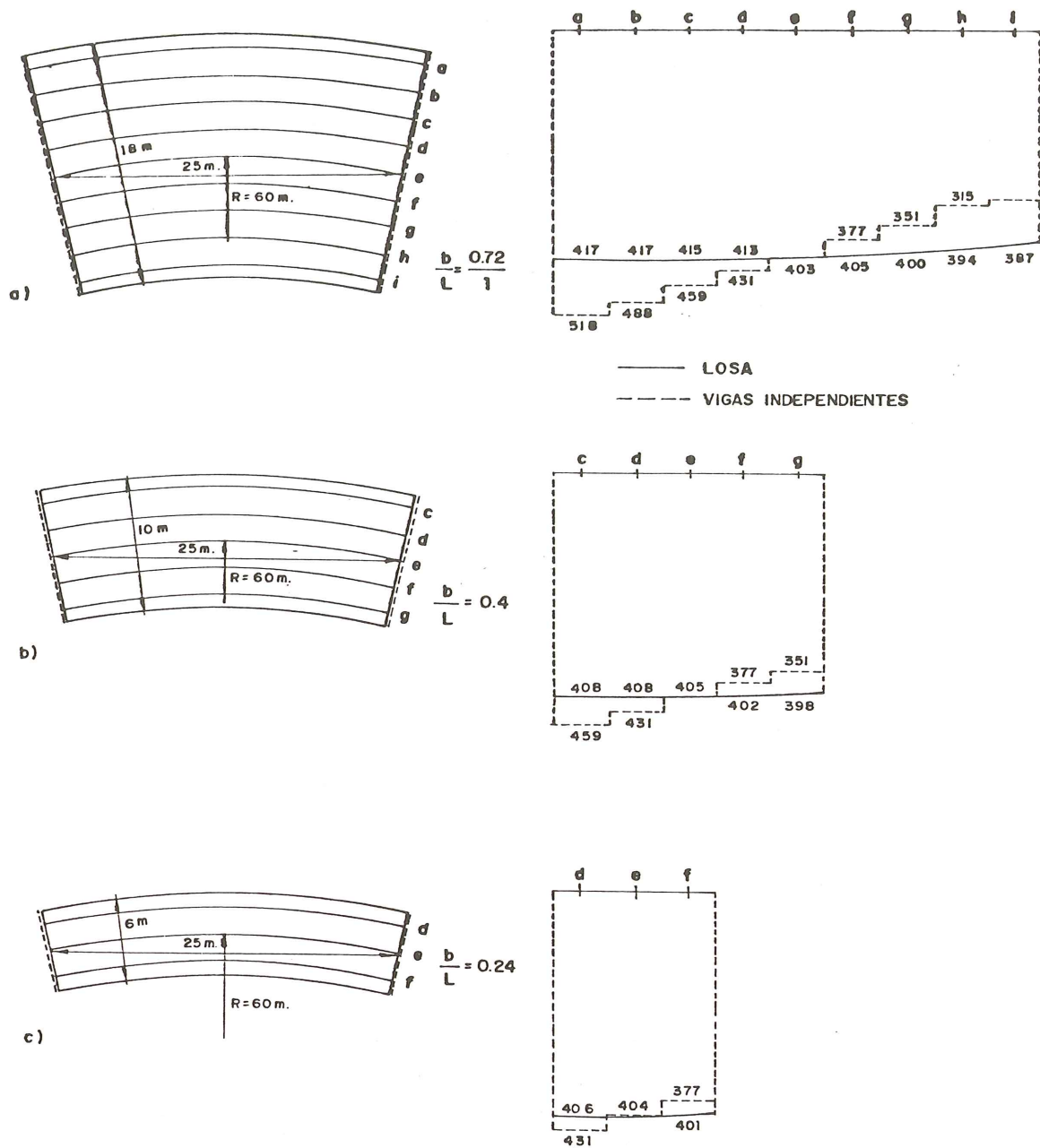


Fig. 2.11. Variación de la relación ancho/luz. Planta de la losa y distribución de los momentos flectores longitudinales en el centro de la luz.

hasta ahora, pues la respuesta elemental de una viga curva es inversamente proporcional al cuadrado del radio, como ya vimos en el apartado 1.

La pauta que siguen las leyes de momentos flectores es similar a la que vimos con anterioridad, aunque la diferencia que existe entre los esfuerzos de las vigas curvas elementales y los de tales vigas formando parte del tablero curvo es mínima. También las leyes de momentos torsores se atenúan mucho, así como la cantidad de carga vertical que se traslada de una zona a otra del tablero.

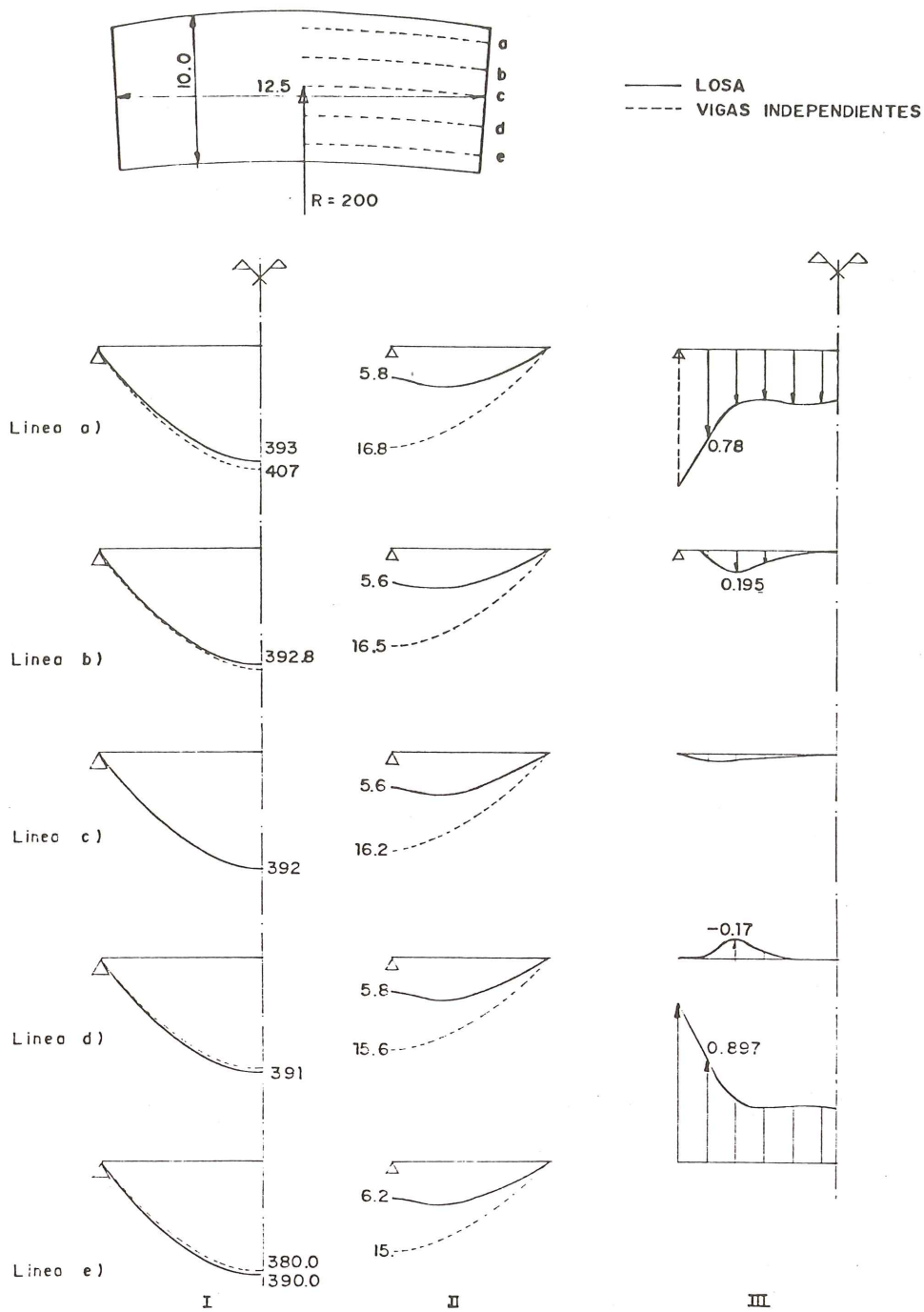


Fig. 2.12. Distribución de esfuerzos en un tablero circular Bi-apoyado  $R=200$  m.  
 I.- Momentos flectores longitudinales.  
 II.- Momentos torsores longitudinales.  
 III.- Leyes de cargas y descargas de cada una de las líneas curvas.

## 2.6. Conclusión respecto al comportamiento del tablero losa, curvo, en planta

Un tablero losa, curvo, desarrolla dos mecanismos de resistencia que le confieren su carácter específico y que complementan la respuesta individual de la serie de vigas circulares en que podría dividirse el tablero mediante una serie de cortes longitudinales.



A la deformación libre de las vigas longitudinales, que depende de su luz, y de su rigidez a flexión y a torsión, se oponen dos mecanismos de resistencia:

1. La rigidez a torsión de los elementos transversales del tablero, tiende a igualar los giros a flexión de las vigas longitudinales. Esta tendencia es tanto más acusada cuanto mayor es su rigidez a torsión; y tiene como consecuencia una reducción de los momentos flectores de las vigas longitudinales más largas (exteriores) a costa de las más cortas (interiores). Este primer mecanismo es de una gran eficacia.
2. La rigidez a flexión de los elementos transversales es excitado por la diferencia de flechas entre las vigas longitudinales y por la diferencia entre los giros a torsión de las mismas. Los dos tipos de movimiento de las vigas longitudinales, se contrarrestan entre sí; ya que los giros en las vigas curvas son del mismo signo que las que producen las diferencias de flechas. (Segundo mecanismo de resistencia).
3. La influencia de este segundo mecanismo de resistencia va a depender de los valores  $K = \frac{EI}{GJ}$  de las vigas circulares elementales. Si estos son grandes (vigas circulares de pequeña rigidez a torsión) los giros de torsión de las vigas longitudinales se diferencian más que las flechas; lo que determina un traspaso muy eficaz de cargas, de la parte interior del tablero a la exterior. En este caso, si las vigas transversales tienen además, poca rigidez a la torsión y no puede desarrollarse eficazmente el primer mecanismo de resistencia, ocurre que las vigas exteriores se cargan mucho y sus momentos flectores son mucho mayores que los de las vigas elementales que se obtienen por cortes longitudinales del tablero. Por el contrario, las vigas interiores se descargan.

Esta morfología del puente losa curvo es, por tanto, muy mala; ya que el reparto, en vez de aliviar las zonas más cargadas del tablero, las penaliza.

4. Mirado el tablero curvo desde un punto de vista totalizador se puede concluir:
  - 4.1. Es una estructura con una sollicitación permanente a la torsión proporcionada, por la curvatura en planta del tablero.
  - 4.2. En las secciones transversales de tableros curvos de baja rigidez a la torsión (tablero de vigas "T"), la sollicitación de torsión se resuelve en flexiones longitudinales, a través de los pares de fuerzas iguales y contrarias que desarrolla la rigidez a flexión transversal del tablero. Como consecuencia, las vigas exteriores están mucho más sollicitadas a flexión y las interiores se descargan.
  - 4.3. En las secciones transversales de gran rigidez a la torsión, la sollicitación torsora se resuelve principalmente en tensiones tangenciales, sin que se produzca un incremento de la flexión del tablero. Más aún; la rigidez conjunta del mismo, tiende a igualar la sollicitación flectora en todo el tablero.
  - 4.4. La rigidez a torsión se consigue:
    - a) En secciones macizas o aligeradas interiormente.
    - b) En tableros de vigas, cuando éstas son de secciones cajón.
    - c) Con arriostramientos transversales muy rígidos a la torsión.
5. Bajo cargas puntuales, el reparto transversal viene muy influenciado por la situación de la carga en el tablero, (lado interior o exterior), y por el radio de curvatura de la losa.
6. La continuidad estructural de los tableros curvos, reduce muy eficazmente la influencia de la sollicitación torsora, ya que los momentos negativos de flexión que se desa-

rollan en los apoyos contribuyen muy eficazmente a eliminarla. En los tableros se produce un comportamiento muy similar al de las vigas curvas.

7. La curvatura en planta es el elemento desencadenante del proceso y, por tanto, su efecto será tanto mayor cuanto mayor sea ésta.

### 3. Tablero cajón

Al estudiar la viga curva en el punto 1, suponíamos ésta absolutamente indeformable y con coincidencia entre el centro de esfuerzos cortantes y el centro de gravedad de la sección. En el caso de puente cajón esto no ocurre; la sección transversal es deformable y, por consiguiente, se producirá en ella una determinada distorsión.

Cuando se analiza la distorsión en vigas cajón rectas [5], se ve que ésta es consecuencia de la variación de la torsión a lo largo de la viga.

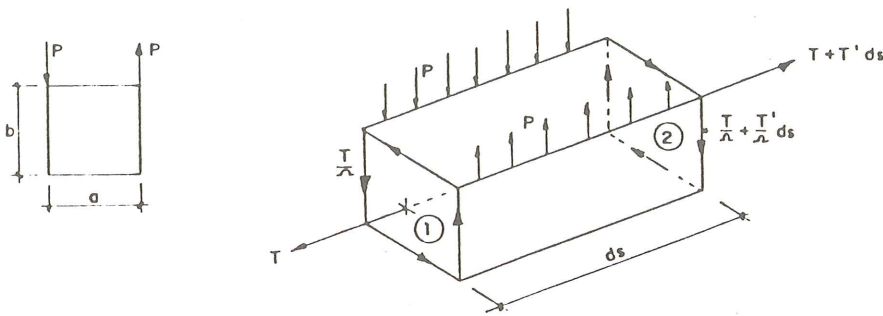


Fig. 3.1.

En un elemento  $ds$  de una viga cajón recta, las solicitaciones que se presentan son (Fig. 3.1):

Cara (1). Un flujo de tensiones tangenciales, cuyo valor es  $\frac{T}{\Omega}$ .

Cara (2). Un flujo de tensiones tangenciales, cuyo valor es:

$$\frac{T}{\Omega} + \frac{T'}{\Omega} ds$$

A lo largo del elemento diferencial,  $ds$ . Un par solicitación, que equivale a una torsión de valor:  $P \cdot a \cdot ds$ .

Del equilibrio de torsiones del elemento diferencial resulta:

$$T + T' \cdot ds - T - P \cdot a \cdot ds = 0; \quad T' = P \cdot a = m.$$

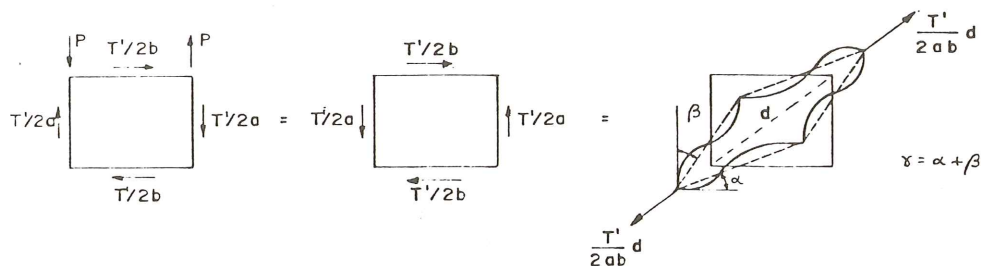


Fig. 3.2.



Sin embargo, esta sollicitación, de resultante nula, produce deformación de la sección; ya que las componentes de los esfuerzos que actúan en las caras del elemento diferencial son:

En caras verticales:  $\frac{T'}{\Omega} \cdot b = \frac{T'}{2a}$

En caras horizontales:  $\frac{T'}{\Omega} \cdot a = \frac{T'}{2b}$

Por cargas exteriores:  $p = \frac{T'}{a}$

y su acción total equivale a la de dos cargas, iguales y opuestas, de resultante y momento nulo, pero que producen la deformación de la sección, representada en la figura 3.2.

La ecuación diferencial que gobierna esta deformación es:

$$\gamma^{IV} + 4\lambda^4 \cdot \gamma = \frac{1}{WA} \cdot \frac{m}{2}; \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4WA}}$$

Esta deformación produce un estado tensional, longitudinal, antisimétrico y una flexión de la sección transversal (Fig. 3.3).

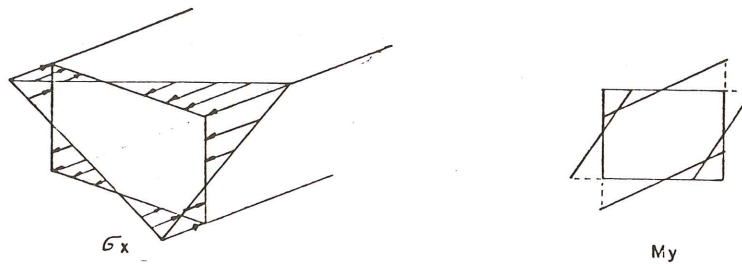
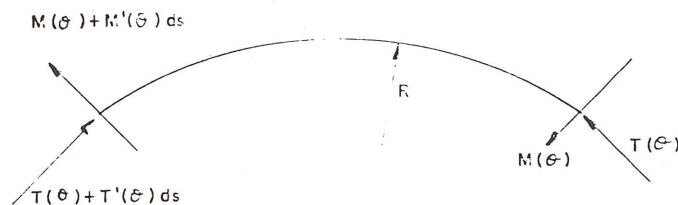


Fig. 3.3.

En los puentes rectos, se produce distorsión de la sección cajón bajo la acción exclusiva de la torsión variable.

Sin embargo, en puentes curvos, la distorsión se produce incluso para sobrecargas uniformes y centradas respecto al eje de la viga.

En efecto, si repasamos las ecuaciones de equilibrio de la viga curva, [1], tendremos (Fig. 3.4):



$$\frac{dT(\theta)}{ds} = \frac{M(\theta)}{R} \quad (4)$$

$$\frac{dM(\theta)}{ds} = -\frac{T(\theta)}{R} - V(\theta) \quad (5)$$

Fig. 3.4.

Según la ecuación (4), una viga curva está sometida a un incremento de momento torsor, por unidad de longitud, aunque no exista sollicitación torsora exterior.

Si hacemos lo mismo que hemos hecho en el caso de los puentes rectos, tendremos que las fuerzas que actúan en un elemento diferencial estarán formadas por dos grupos (Fig. 3.5):

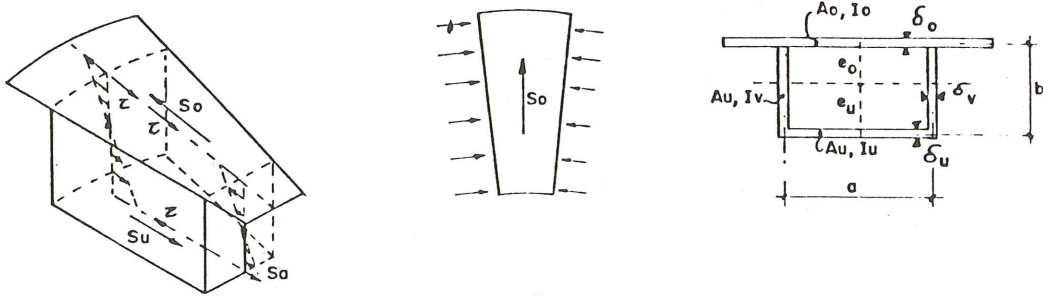


Fig. 3.5.

- a) Las fuerzas  $S_o$ ,  $S_u$  y  $S_a$ , que corresponden a la flexión longitudinal del puente curvo,  $M(\theta)$ , y  $M(\theta) + M'(\theta) ds$ , y cuyas resultantes son:

$$S_o = \frac{M(\theta) \cdot A_o \cdot e_o}{I_x \cdot R}; \quad S_u = \frac{M(\theta) \cdot A_u \cdot e_u}{I_x \cdot R}; \quad S_a = \frac{M(\theta) \cdot y \cdot \delta_v}{I_x \cdot R}$$

- b) Las tensiones  $\tau$ , correspondientes a las torsiones,  $T(\theta)$ , y  $T(\theta) + T'(\theta) ds$ , y cuya resultante es:

$$\tau = \frac{T'(\theta)}{\Omega} = \frac{M(\theta)}{R \cdot \Omega}$$

Estos dos grupos, de resultante y momento nulo, determinan una sollicitación de la sección, como la representada en la figura 3.6.

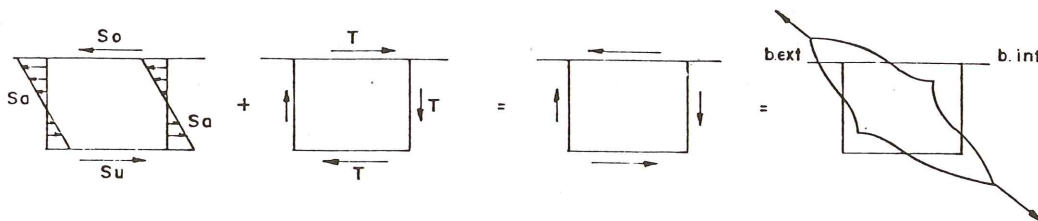


Fig. 3.6.

Es decir, la curvatura en planta de un puente cajón, crea por sí sola, aún con cargas centradas, una distorsión que tiende a cargar el lado de radio más pequeño y descargar el de radio más grande.

La ecuación diferencial que gobierna este fenómeno es:

$$\gamma^{IV} + 4\lambda^4 \cdot \gamma = \frac{1}{WA} \left( \rho \cdot \frac{M(\theta)}{R} + \frac{m}{2} \right) \quad (6)$$

que como vemos es prácticamente igual a la del puente recto, pero en la que a la sollicitación exterior torsora  $\frac{m}{2}$ , se le añade un sumando dependiente de la flexión longitudinal. Fijémosnos que en la teoría simplificada de la viga curva (apéndice 1), se obtienen los momentos torsores de la viga curva simple de la misma manera.

\* En el punto 4 se dan los valores de estas constantes. La aplicación del método, los valores de las tensiones y la operatividad, son los mismos que para puentes rectos. Véase [5].



La teoría que acabamos de exponer es una simplificación del problema real, pero perfectamente válida para la mayoría de los puentes reales. El cálculo se reduce entonces a calcular el puente curvo como si fuese recto y añadirle la distorsión que produce la flexión longitudinal.

Si queremos analizar con más precisión la respuesta del puente cajón curvo, debemos acudir a otros procedimientos de cálculo que tengan en cuenta, además de la distorsión de la sección transversal, la deformación por esfuerzo cortante de las caras y la torsión no uniforme que se produce en todo puente. Nosotros, para el ejemplo que vamos a examinar seguidamente, hemos utilizado una discretización del cajón por elementos finitos tipo lámina.

En la figura 3.7 analizamos un puente cajón, de 60 m de radio, de la misma luz y anchura que los puentes losa antes estudiados, y sometido a la acción del peso propio. En 3.7a, se representa la distribución de tensiones longitudinales en la sección central, junto con el efecto de la deformación por esfuerzo cortante de las caras, y el efecto que sobre las mismas produce la distorsión, incrementando las tensiones en el borde interno del cajón y disminuyéndolas en el externo. Este estado tensional se compara con el que se produciría en el mismo puente si fuese recto. Se ve que la diferencia es muy pequeña; y esto es lógico, pues el radio de curvatura no es muy pequeño y la distorsión producida por una solicitación parabólica, como es la ley de  $M(\theta)/R$ , es pequeña por su falta de concentración local, que es lo que produce efectos violentos.

La ley de momentos flectores transversales (Fig. 3.7c), recoge el efecto de la distorsión, inclinando la ley normal del puente recto. También en los corrimientos de la sección central aparece este mismo fenómeno. Junto con el descenso de flexión y el giro de torsión, aparece la deformación por distorsión (Fig. 3.7b).

En la figura 3.8, aparece la respuesta de este mismo tablero bajo el efecto de una carga puntual colocada en el punto *A* (exterior) o el *B* (interior), de la sección central.

Bajo este tipo de solicitación aparece otra particularidad en el comportamiento de los puentes cajón curvos. Bajo la carga excéntrica, la distorsión del cajón se compone de dos sumandos:

- a) La distorsión correspondiente a un puente recto por excentricidad de la carga, que en este caso es muy violenta por tratarse de una carga puntual.
- b) La distorsión que produce la curvatura en planta del tablero por la solicitación  $M(\theta)/R$ , mucho menos intensa por tratarse de una carga repartida.

Ambas hacen el efecto de quitar rigidez a la sección transversal, haciendo que la tendencia de la viga cajón, cuando es ancha y delgada, sea trabajar como dos vigas elementales de forma  $\perp J$ . Resulta, entonces, que cuando cargamos en la zona exterior (carga en *A*), como la viga exterior tiene más luz que la interior, el estado tensional longitudinal que se produce es mayor, como claramente aparece en la figura 3.8b. Aunque las tensiones máximas son prácticamente iguales, el área de las tensiones longitudinales es mayor en el caso de la carga en *A* que en el caso de carga en *B*.

La igualación de las tensiones máximas que ocurre en este caso, se debe a que la distorsión ocasionada por la curvatura, siempre tiende a incrementar el estado tensional en la zona interior.

En la figura 3.8c aparecen los momentos flectores transversales en la sección central, y en ella se ve la influencia de la distorsión debida a la curvatura. Cuando cargamos en *A*, la distorsión debida a la curvatura se resta de la originada por la excentricidad de la carga; y viceversa.

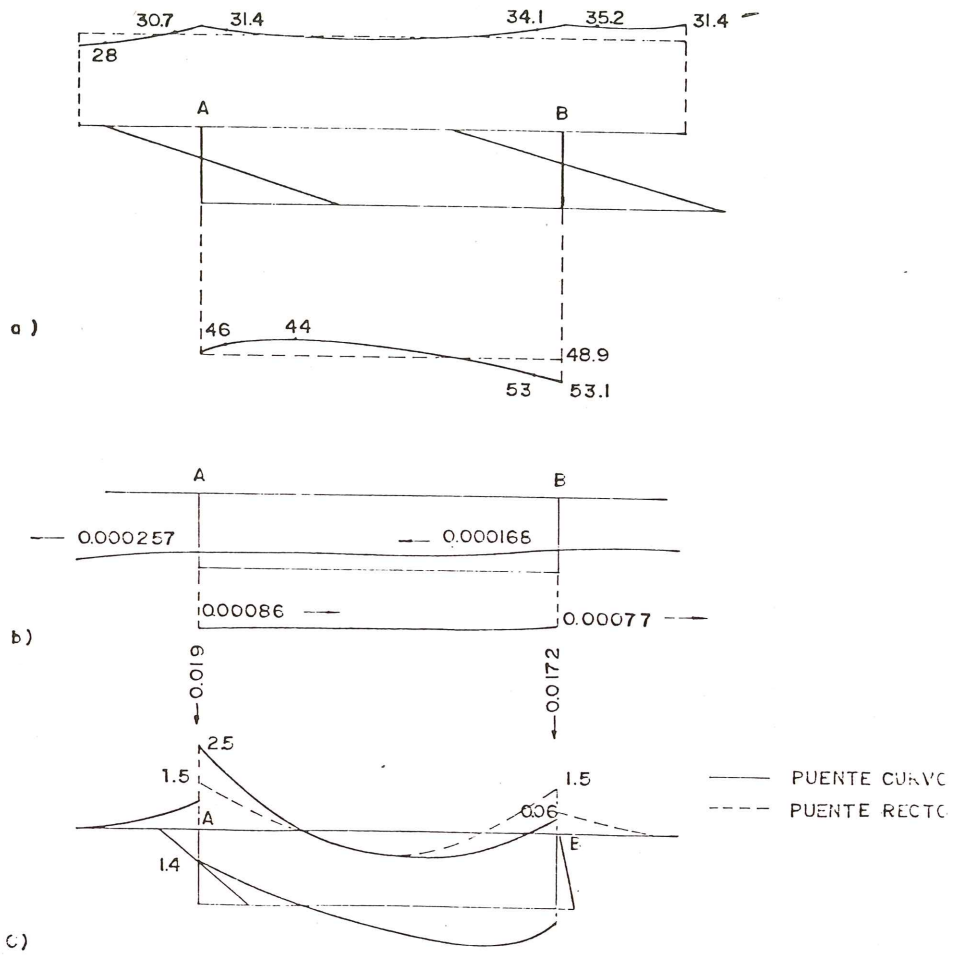
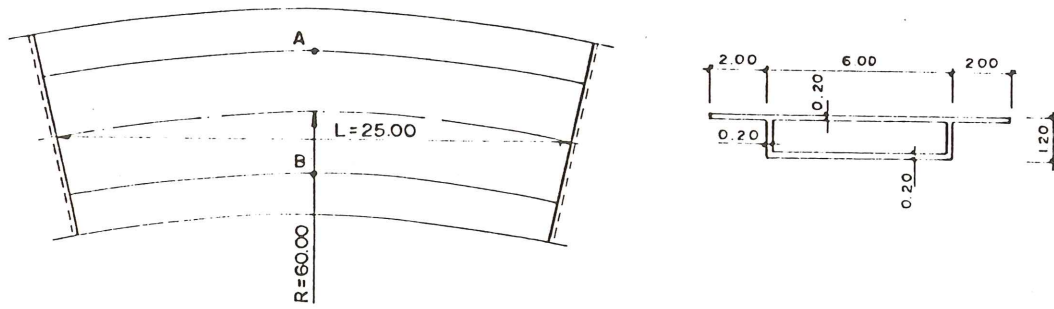


Fig. 3.7. Puente cajón curvo.  $R=60.00$ . Peso propio. Sección central.  
 a) Distribución de tensiones longitudinales.  
 b) Distribución de corrimientos.  
 c) Distribución de momentos flectores transversales.



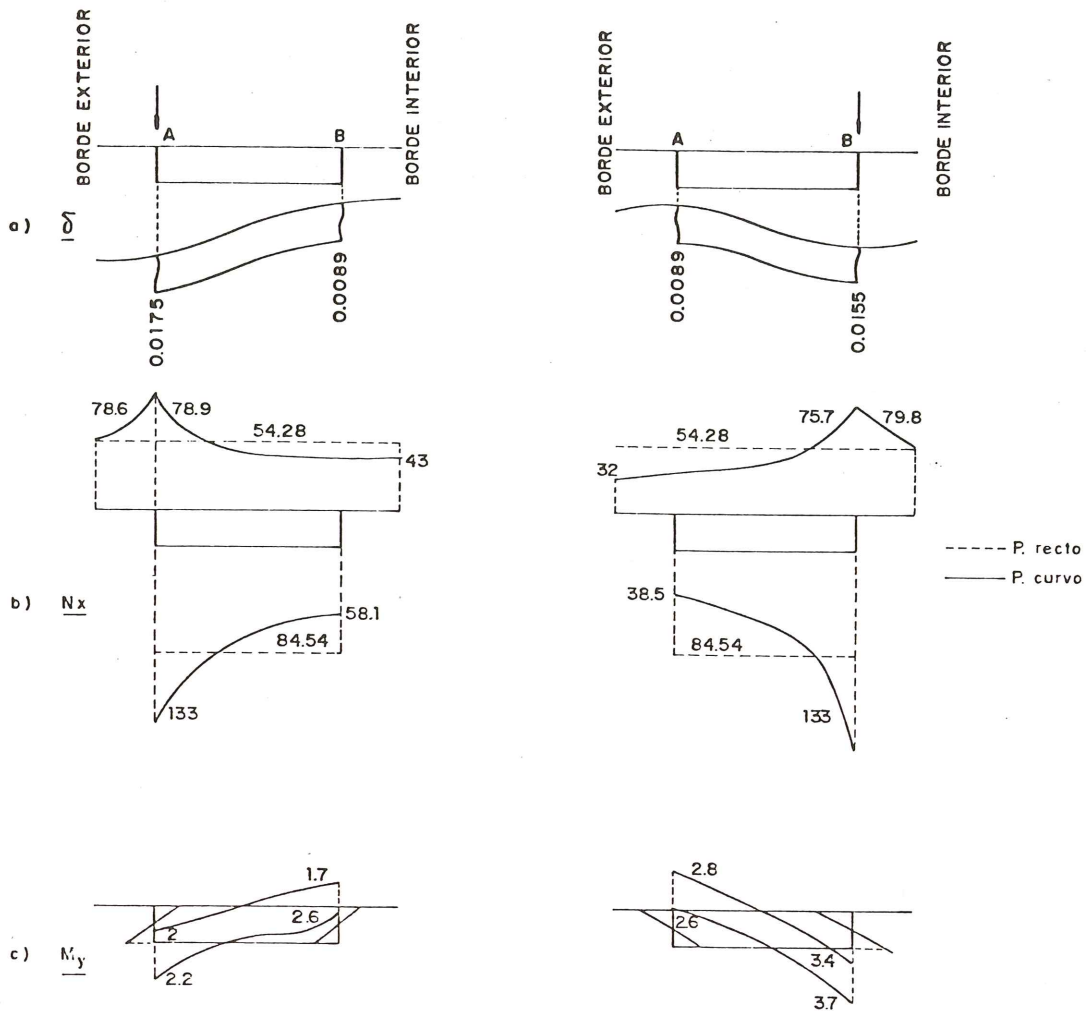


Fig. 3.8. Viga cajón curva, bajo carga puntual. Sección central.

- a) Corrimientos.  
 b) Axiles longitudinales.  
 c) Momentos flectores transversales.

Estas conclusiones parciales se constatan en los estudios realizados por C. Meyer [3] mediante bandas finitas de vigas cajón, cuando se varía el radio de curvatura en planta (Fig. 3.9). Se trata de un puente cajón monocelular, bastante estrecho y bi-apoyado, que se solicita por dos hipótesis de carga: el camión de la norma U.S.A. colocado en la posición A, o en la posición B.

Los resultados se dan, englobados, en los momentos que resultarían sobre cada una de las dos vigas virtuales en que se puede descomponer la viga cajón. Se denomina  $M_T$  el momento total sobre la viga cajón, en el centro de la luz, y  $M$  el momento que se lleva cada una de las vigas.

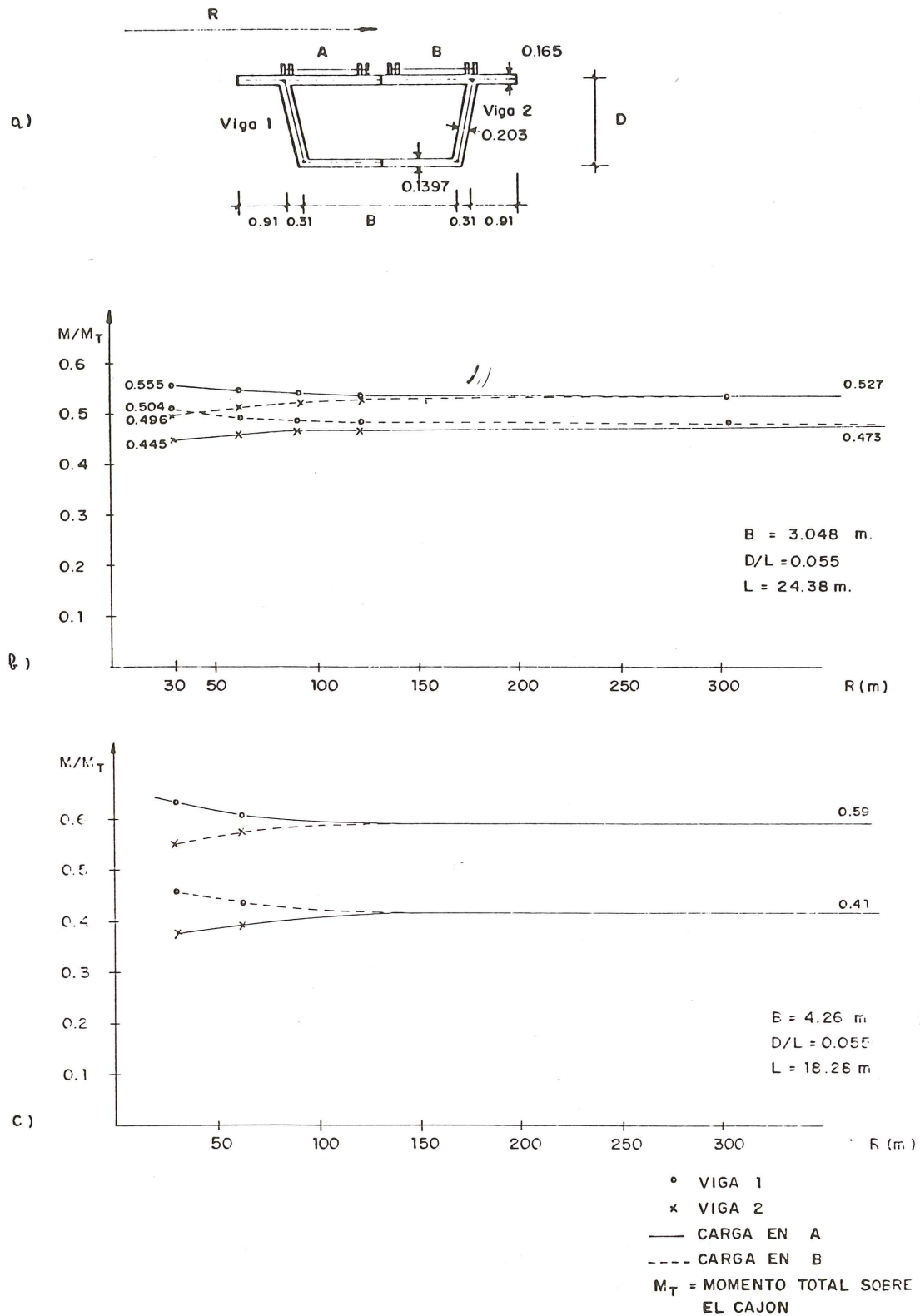


Fig. 3.9. Influencia del radio de curvatura, en la respuesta de vigas cajón (C. Meyer).



Para radios de curvaturas grandes (Fig. 3.9b), el efecto de la curvatura desaparece. Cada una de las vigas recoge un momento diferente e igual al que tendría un puente recto bajo la distorsión que le produce el descentramiento de la carga. Para radios de curvaturas pequeños, la distorsión complementaria que acabamos de analizar, debida a la curvatura en planta, hace que la viga 1 adquiera mayores valores que la viga 2, aún para carga situada en la viga 2.

Cuando aumentamos el ancho del cajón (Fig. 3.9c), la distorsión normal como puente recto es mayor; y aunque la distorsión como puente curvo tiende a incrementar la carga en la viga 1, no puede llegar a alcanzar valores similares a los de la viga 2 cuando la carga actúa sobre ella.

De todo lo expuesto se pueden sacar las siguientes conclusiones sobre la influencia de la curvatura en puentes cajón:

- 1- La curvatura en planta produce una distorsión del cajón, incluso para cargas uniformemente repartidas en el tablero. Esta distorsión tiende a cargar la zona del cajón más próxima al centro de curvatura y descargar la opuesta.
- 2- El efecto que produce la distorsión es como si la zona de viga cajón (viga 1 de la Fig. 3.9a) más próxima al centro de curvatura, fuese más rígida, y la opuesta más elástica.
- 3- Este efecto es tanto más importante conforme el radio de curvatura es menor y la relación ancho-luz mayor.
- 4- Para radios de curvatura pequeños, la carga puesta en el borde exterior experimenta un reparto, en toda la viga cajón, mucho más adecuado que si la carga está en el borde interior.

#### 4. Cálculo de puentes curvos

El cálculo general de estructuras presenta, hoy en día, un conjunto de métodos de cálculo que pueden reproducir el comportamiento resistente de las estructuras, tanto de las más complejas como de las más simples. La utilización de los métodos más complejos, lleva aparejado un gran volumen de computación, que muchas veces puede resultar superabundante para la estructura que estamos calculando. Por otro lado, un método muy simple puede no reproducir la especial manera de comportarse los puentes curvos.

Por esta razón, vamos a examinar los procedimientos de cálculo más habituales y ver cómo se ajusta, cada uno de ellos, a los diferentes tipos de tableros con que nos encontramos en la realidad.

##### 4.1. Método de la viga indeformable

La utilización de la teoría elemental de la viga, sólo es posible para puentes curvos cuya sección transversal pueda considerarse como indeformable y cuando las deformaciones de alabeo puedan considerarse lo suficientemente pequeñas como para que no influyan en la respuesta resistente.

Esto sólo se produce en secciones macizas o secciones cajón con una pequeña relación ancho-luz y radios de curvatura no muy pequeños. Este es el caso de los puentes de gran luz.

Para puentes con relación ancho-luz grande, la deformación transversal es significativa y, por tanto, no deberá utilizarse. Es el caso de puentes curvos con sección transversal en losa maciza o aligerada; de puentes de vigas, o de puentes cajón sin un arriostamiento transversal suficiente.

No está establecido el límite preciso respecto al valor que tiene que tener la relación ancho-luz, o a partir de qué radios de curvatura no es posible utilizar esta teoría. Para los puentes tipo losa o losa aligerada, no se debe emplear nunca. La duda surge respecto al valor de la relación ancho-luz a partir de la cual se puede utilizar esta teoría en puentes cajón. Si disponemos de vigas riostras intermedias, la distorsión del cajón se reduce mucho y, en este caso, la distorsión que produce la curvatura en planta y que hemos examinado en el apartado 3, estaría controlada. A partir de aquí, nos quedarían como deformaciones no controladas por la teoría elemental de la viga, la deformación por esfuerzo cortante de las losas que constituyen el cajón y el alabeo torsional; problemas éstos comunes para puentes cajón rectos, y a los que referiremos el problema.

En el apéndice 1 se ven casos resueltos por este procedimiento.

#### 4.2. Método de la viga, en que se tiene en cuenta la distorsión y el alabeo torsional\*

Para el caso de puentes rectos, este método de cálculo lo hemos examinado en [5]. Aquí vamos a ampliarlo a vigas curvas, siguiendo los trabajos de Dabrowski [1] y Kristek [6]. Para ello, seguiremos el método habitual de considerar la deformación total dividida en dos partes. En la primera, se considera la flexión y la torsión no uniforme, de la viga con curvatura circular, sección constante y suponiendo que la sección transversal es indeformable. En la segunda, consideraremos el efecto producido por la deformación transversal. En los dos casos se supone que las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con el radio de curvatura en planta.

##### 4.2.1. Sección transversal indeformable. Sección abierta

Consideremos un elemento diferencial de viga curva, limitado por dos planos radiales infinitamente próximos (Fig. 4.1).

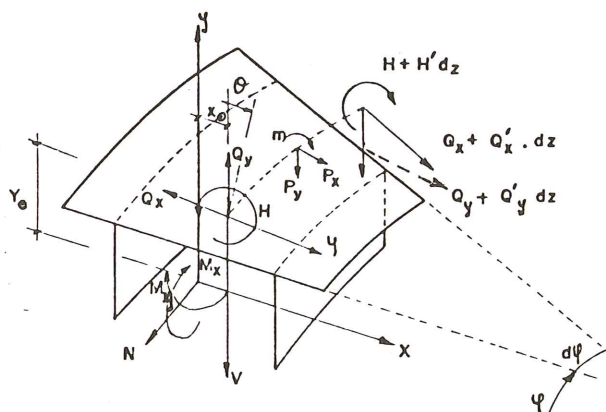


Fig. 4.1.

\* En esta exposición, se hace referencia continuamente al planteamiento de puentes rectos dado en las referencias bibliográficas [1] y [5], donde se especifican muchos de los valores y conceptos que aquí se dan por sobreentendidos.

Las componentes de las cargas  $P_x$ ,  $P_y$  y  $m$ , se refieren a la línea de centros de esfuerzos cortantes, lo mismo que los cortantes  $Q_x$ ,  $Q_y$  y el momento torsor  $H$ . Por otro lado, los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$ , así como la fuerza axil  $N$ , se aplican en el centro de gravedad de la sección.

La referencia entre la línea de centros de gravedad y la de centros de esfuerzos cortantes es  $y_0$  en vertical, y  $x_0$  en horizontal, para secciones no simétricas. En general,  $x_0$  es muy pequeña comparada con  $y_0$ , para el tipo de asimetrías que se suelen tener. En secciones simétricas se tendrá,  $x_0 = 0$ . Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, en las direcciones  $x, y, z$  son:

$$Q'_x + \frac{N}{r} + P_x = 0 \quad (7)$$

$$Q'_y + P_y = 0 \quad (8)$$

$$N' - \frac{Q_x}{r} = 0 \quad (9)$$

donde  $r$  es el radio de curvatura del centro de gravedad de la sección.

Las ecuaciones de equilibrio para momentos, tomadas respecto a los ejes  $x, y$  y la tangente a la curva de centros de esfuerzos cortantes, son:

$$M'_x + \frac{1}{r} (H + Q_x \cdot y_0) - Q_y = 0 \quad (10)$$

$$M'_y - Q_x = 0 \quad (11)$$

$$H' - \frac{1}{r} (M_x + N \cdot y_0) + m = 0 \quad (12)$$

La expresión de las deformaciones de cada fibra longitudinal, se compone de dos partes. La primera corresponde a la curvatura de la viga en las dos direcciones y a la deformación producida por la torsión alrededor del centro elástico:

$$\epsilon_I = -u'' \cdot x + v'' \cdot y - \tau'' \cdot \omega$$

y en ella la torsión de la viga viene dada por la segunda derivada del ángulo reducido de rotación,  $\tau$ :

$$\tau = \theta + \frac{v}{r} \quad \tau'' = \theta'' + \frac{v''}{r} \quad (13)$$

La segunda parte de la expresión de la deformación de la fibra es debida al desplazamiento radial  $u$  y al desplazamiento axial  $w'_s$ :

$$\epsilon_{II} = w'_s - \frac{u + (y - y_0) \theta}{r - x} \simeq w'_s - \frac{u + (y - y_0) \theta}{r^2} (r + x)$$

A partir de la tensión normal:

$$\sigma = E (\epsilon_I + \epsilon_{II})$$

y de las expresiones:

$$\begin{aligned} M_x &= - \int_A \sigma \cdot y \cdot dA & M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA \\ N &= \int_A \sigma \cdot dA & B &= \int_A \sigma \cdot \omega \cdot dA \end{aligned}$$



y eliminando términos de segundo orden, queda:

$$M_x = -E \cdot I_x \left( v'' - \frac{\theta}{r} \right) + E \cdot I_{xy} \left( u'' + \frac{u}{r^2} \right) \quad (14)$$

$$M_y = -E \cdot I_y \left( u'' + \frac{u}{r^2} - \frac{y_0 - r_x}{r^2} \theta \right) + E \cdot I_{xy} \left( v'' - \frac{\theta}{r} \right) \quad (15)$$

$$N = E \cdot A \left( w_s' - \frac{u - y_0 \cdot \theta}{r} \right) \quad (16)$$

$$B = -E \cdot I_{\omega} \cdot \tau'' \quad (17)$$

en donde:

$$r_x = \frac{I}{I_y} \int_A x^2 \cdot y \cdot dA$$

El momento torsor, al igual que en puentes rectos [1] y [5], se compone de la torsión primaria (Saint Venant):

$$H_d = G \cdot I_d \cdot \tau'$$

y de la torsión secundaria:

$$H_{\omega} = -E \cdot I_{\omega} \cdot \tau''$$

de donde la torsión total queda:

$$H = G \cdot I_d \cdot \tau' - E \cdot I_{\omega} \cdot \tau''$$

Diferenciando una vez esta última ecuación y sabiendo que:

$$H' = - \left( m - \frac{M_x + N \cdot y_0}{r} \right)$$

queda la ecuación diferencial que gobierna la torsión no uniforme de secciones abiertas:

$$\tau^{IV} - K^2 \cdot \tau^{II} = \frac{1}{E \cdot I_{\omega}} \left( m - \frac{M_x + N \cdot y_0}{r} \right) \quad (18)$$

Siendo:

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot I_d}{E \cdot I_{\omega}}}$$

Como se ve, esta ecuación es exactamente igual a la de las vigas rectas salvo que en ella, al momento torsor solicitación  $m$ , es necesario añadirle el efecto del momento flector longitudinal partido por el radio.

En el caso en que la viga sea isostática, los valores de  $M_x$  y  $N$  son conocidos y por tanto el segundo miembro es conocido y puede integrarse la ecuación diferencial. En el caso en que la estructura no sea isostática es necesario obtener los corrimientos en el contorno, en la estructura supuesta isostática, y las compatibilidades en el mismo, para conocer las incógnitas hiperestáticas (véase [1]); o suponer el caso aproximado de que la ley de momentos flectores no va a variar sensiblemente de la de la viga recta de la misma luz, para poder así integrar la ecuación diferencial.

4.2.2. *Sección transversal indeformable. Sección cerrada*

El planteamiento del problema para secciones cerradas, no varía nada del que se realiza en puentes rectos. La ecuación diferencial toma la forma:

$$f^{IV} - K^2 f'' = -\frac{\mu}{E \cdot I_{\omega}} \left( m - \frac{M_x + N \cdot y_0}{r} \right) \quad (19)$$

Siendo:

$$K = \sqrt{\mu \frac{G \cdot I_d}{E \cdot I_{\omega}}}$$

4.2.3. *Sección transversal deformable. Sección cerrada*

Como hemos visto en el apartado 3, en un elemento diferencial de puente curvo actúan las siguientes fuerzas equilibradas:

1º) Debidas a la flexión longitudinal:

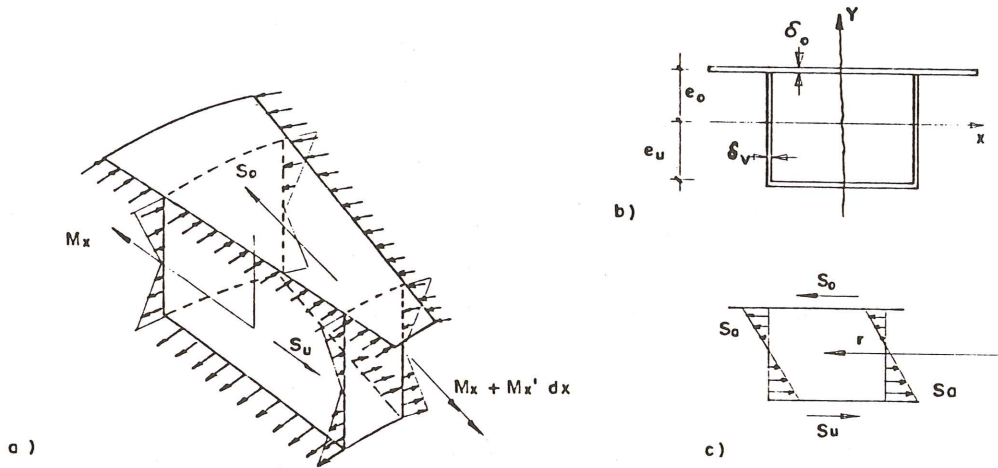


Fig. 4.2

Las flexiones  $M_x$ ,  $y$ ,  $M_x + M_x' \cdot dx$ , producen, debido a la curvatura del elemento diferencial, unas resultantes, transversales a la sección, cuyos valores son (Fig. 4.2):

$$S_o = \frac{M_x \cdot A_o \cdot e_o}{I_x \cdot r} \quad S_u = \frac{M_x \cdot A_u \cdot e_u}{I_x \cdot r} \quad S_a = \frac{M_x \cdot y \cdot \delta_v}{I_x \cdot r}$$

2º) Debidas a la torsión:

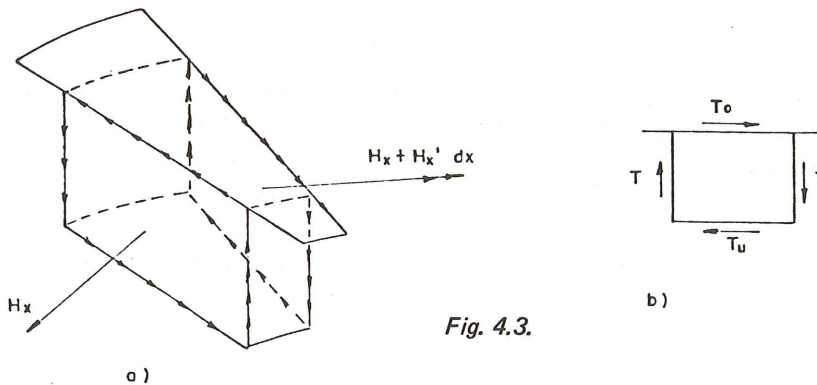


Fig. 4.3.

Las torsiones  $H_x$ , y,  $H_x + H'_x \cdot dx$ , producen, en cada cara, un flujo de tensiones tangenciales de Saint Venant cuyo valor es (Fig. 4.3):

$$f_1 = \frac{H_x}{\Omega} ; \quad f_2 = \frac{H_x + H'_x \cdot dx}{\Omega}$$

La diferencia entre estos valores es:

$$f_2 - f_1 = \frac{H'_x}{\Omega} \cdot dx = f$$

pero como según la ecuación de equilibrio de la viga curva:

$$H'_x = \frac{M_x}{r}$$

el valor del flujo de tensiones tangenciales resultante en el elemento, por metro lineal, será:

$$f = \frac{M_x}{r \cdot \Omega}$$

Las resultantes de estas fuerzas a lo largo de las caras serán:

$$T_o = \frac{M_x}{r \cdot \Omega} \cdot a ; \quad T_u = \frac{M_x}{r \cdot \Omega} \cdot a ; \quad T = \frac{M_x}{r \cdot \Omega} \cdot b$$

La suma de estos dos tipos de esfuerzos, darán lugar a un conjunto de fuerzas transversales, equilibradas, representadas en la figura 4.4.a:

$$\begin{aligned} & \frac{M_x}{r} \left[ \frac{A_o e_o}{I_x} - \frac{\sigma}{\Omega} + \frac{2 \delta_v}{I_x} \left( \frac{b^2}{3} - \frac{e_u b}{2} \right) \right] \\ & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \frac{M_x}{r \cdot \Omega} b \uparrow \quad \leftarrow \\ \leftarrow \\ \frac{M_x}{r \cdot \Omega} b \downarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \\ & \text{o) } \frac{M_x}{r} \left[ \frac{A_u \cdot e_u}{I_x} - \frac{\sigma}{\Omega} + \frac{2 \delta_v}{I_x} \left( -\frac{b^2}{6} + \frac{e_u b}{2} \right) \right] \quad \text{b) } \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \end{aligned}$$

Fig. 4.4.

Si la sección transversal fuese indeformable, estas fuerzas se anularían entre sí y no pasaría nada.

Cuando la sección transversal es deformable estas fuerzas la deformarán, produciéndose un doble mecanismo de resistencia. El primero, la flexión en su plano de cada una de las caras que configuran la viga cajón curva. El segundo, la rigidez de la sección transversal como marco. Entre los dos, y en función de sus rigideces respectivas, resisten el efecto de esas fuerzas.

#### 4.2.3.1. Deformación, en su plano, de cada una de las caras del cajón

La distribución de las tensiones longitudinales producidas por esta flexión, de resultante y momento nulo, como corresponde a la sollicitación, tiene una distribución en la sección transversal, como la representada en la figura 4.5b, siendo:

$$\tilde{\omega}_2 = \beta \cdot \tilde{\omega}_1 ; \quad \beta = \frac{A_o \left( 1 + \frac{2e}{a} \right)^2 + 3 A_v}{A_u + 3 A_v}$$



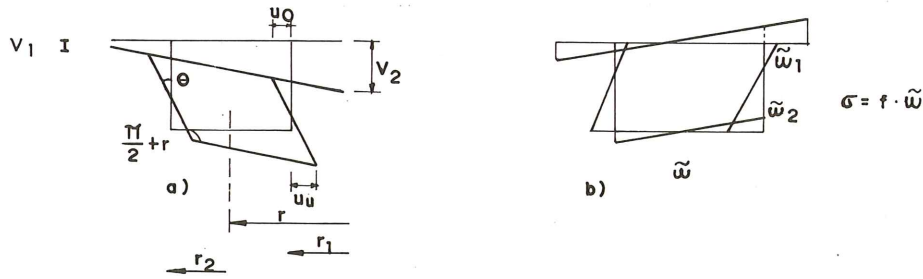


Fig. 4.5.

y una distribución, a lo largo de la viga, proporcional a una función  $f$ . Las fuerzas cortantes producidas por esa flexión en su plano son:

$$T_{\tilde{\omega}} = -f' (S_{\tilde{\omega}} + c) = -f' \cdot \bar{S}_{\tilde{\omega}}$$

$$\bar{S}_{\tilde{\omega}} = S_{\tilde{\omega}} + c \quad c = -\frac{1}{\Omega} \oint S_{\tilde{\omega}} \cdot hds = \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \left[ \left(1 + \frac{2e}{a}\right) A_o + \frac{1}{3} A_v (5-4\beta) - \frac{1}{3} A_u \cdot \beta \right]$$

Estas expresiones son idénticas a las de las vigas rectas.

Las relaciones entre las tensiones normales y los desplazamientos  $u_1, u_2, v_1$  y  $v_2$  (Fig. 4.5a), vienen determinadas por las condiciones de las vigas curvas, ecuaciones (14) y (15) que en este caso toman la forma:

$$\frac{r^2}{r_1^2} v_1'' - \frac{\theta}{r_1} = -\frac{f}{E \cdot b} (\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \quad (20)$$

$$\frac{r^2}{r_2^2} v_2'' + \frac{\theta}{r_2} = \frac{f}{E \cdot b} (\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \quad (21)$$

$$u_o'' + \frac{u_o}{r^2} = -\frac{f}{E \cdot a} \cdot 2 \tilde{\omega}_1 \quad (22)$$

$$u_u'' + \frac{u_u}{r^2} = -\frac{f}{E \cdot a} \cdot 2 \tilde{\omega}_2 \quad (23)$$

La distorsión,  $\gamma$ , viene dada por la ecuación:

$$\gamma = \frac{v_1 - v_2}{u} + \frac{u_o + u_u}{b}$$

Si diferenciamos esta ecuación dos veces e introducimos los valores de las ecuaciones (20), (21), (22) y (23), junto con el valor:

$$\theta = \frac{u_o + u_u}{b}$$

Después de admitir que:

$$2 + \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 4 + \frac{a^2}{2r^2} \simeq 4$$

la ecuación diferencial que resulta es igual a la de las vigas rectas:

$$\gamma'' = -\frac{f}{A}; \quad A = \frac{E \cdot a \cdot b}{4 \tilde{\omega}_1 (1 + \beta)}$$

#### 4.2.3.2. Deformación de la sección transversal, como resultado de la distorsión

Este caso es igual al de las vigas rectas, y por tanto no lo deducimos:

$$\gamma = \frac{W}{K_1} f''; \quad \text{con: } K_1 = \frac{24 E \cdot I_v}{\eta_o \cdot b}; \quad \eta_o = 1 + \frac{2 \frac{a}{b} + 3 \frac{I_o + I_u}{I_v}}{\frac{I_o + I_u}{I_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{I_o \cdot I_u}{I_v^2}}$$

#### 4.2.3.3. Ecuación diferencial que gobierna el fenómeno

Haciendo que el incremento entre las fuerzas cortantes del primer mecanismo y el recogido por el segundo sea igual a la carga exterior de la figura 4.4, tendremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\gamma^{IV} + 4 \lambda^4 \cdot \gamma = \frac{1}{W \cdot A} \left( \rho \frac{M_x}{r} + \frac{m}{2} \right) \quad (24)$$

Donde:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4 W \cdot A}}; \quad W \cdot A = \frac{E \cdot a^2 \cdot b^2}{48} \frac{A_v (2\beta - 1) + A_u \cdot \beta}{1 + \beta};$$

$$\rho = \eta_1 - \frac{\eta_2}{\eta_o}; \quad \eta_1 = \frac{7 e_o - 3 e_u}{10 I_x} b^2 \cdot \delta_v + \frac{A_o \cdot b e_o}{I_x} - \frac{1}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{b \cdot \delta_v}{15 I_x} \frac{(3 e_o - 2 e_u) (a + 3b \frac{I_u}{I_v}) + (3 e_u - 2 e_o) (a + 3b \frac{I_o}{I_v})}{\frac{I_o + I_u}{I_v} + 6 \frac{b}{a} \frac{I_o \cdot I_u}{I_v^2}}$$

La ecuación (24), que determina la distorsión, es similar a la de la viga sobre fundación elástica y a la del puente recto. En el segundo término aparecen los momentos flectores longitudinales y la sollicitación torsora, si ésta existe. Este hecho determina la particularidad de los puentes curvos en los que, aunque no exista sollicitación exterior excéntrica, se produce la distorsión.

La ley de momentos flectores  $M_x$  es conocida en estructuras isostáticas. En estructuras hiperestáticas puede considerarse que es igual a la de la viga sin distorsión y utilizarla, una vez obtenida por los procedimientos normales, como sollicitación exterior.

Este procedimiento sólo es aproximado, pero sirve para acotar el problema habida cuenta de que, como sabemos, la distorsión es importante, sobre todo para cargas puntuales. Bajo este tipo de sollicitación, la distorsión es una deformación local que se disipa rápidamente conforme nos alejamos de la carga.

#### 4.2.4. Conclusiones

El cálculo de puentes curvos utilizando este método, tiene en cuenta los dos efectos que en la teoría elemental de las vigas no aparecían: el alabeo torsional y la distorsión. En la exposición que aquí hemos establecido, reducimos el cálculo a la utilización de la ley de momentos flectores  $M_x$ , que aparece en la sollicitación, tanto de la torsión no uniforme (ecuaciones (18) y (19)) como de la distorsión (ecuación (24)), supuesta conocida y obtenida por la teoría elemental de las vigas (véase 4.1).

Este procedimiento sólo es aproximado y su validez estriba en el hecho de que la ley de momentos longitudinales  $M_x$ , va a variar poco por la presencia de estos dos fenómenos secundarios. Por otra parte, como quiera que este procedimiento introduce además la simplificación de no tener en cuenta la deformación por esfuerzo cortante de las caras del cajón, resultaría ilógico intentar perfeccionar más su respuesta.

Su aplicabilidad la encontramos en los puentes cajón, de una sola célula, con radio de curvatura no excesivamente pequeño. Al cálculo general de esfuerzos obtenidos por el procedimiento indicado en 4.1 se le añaden los dos esfuerzos secundarios, complementarios, obtenidos en 4.2.2. (torsión no uniforme) y en 4.2.3. (distorsión).

En este último caso, cuando la sollicitación no actúe sobre las almas, conviene reducirla a ellas, habida cuenta de que la translación supone una extensión de la misma sobre el alma, que reduce mucho la virulencia de la carga puntual (Fig. 4.6).

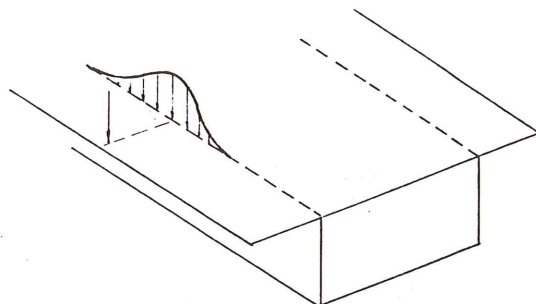


Fig. 4.6.

#### 4.3. Métodos discretos

La discretización de estructuras en elementos finitos es el procedimiento más universal para afrontar el cálculo de cualquier disposición estructural. Dentro de los elementos finitos distinguimos dos clases: aquéllos constituidos por un sistema de barras (método del emparrillado) y los constituidos por elementos finitos superficiales, en su doble versión de elemento losa o elemento lámina.

##### 4.3.1. Método del emparrillado

La reproducción correcta de un tablero de puente por un sistema de vigas es siempre problemática y sólo puede hacerse en determinadas condiciones. En general, podemos decir que cuando el tablero del puente equivalga a una viga de sección indeformable, o sea una losa maciza o aligerada, el emparrillado, dentro de determinadas condiciones, podrá dar una respuesta adecuada al problema. Un puente cajón, con sección transversal deformable, no puede reproducirse por el método del emparrillado.

El primer problema que tenemos que tratar es qué condiciones debe cumplir la reproducción de una viga curva de sección indeformable.



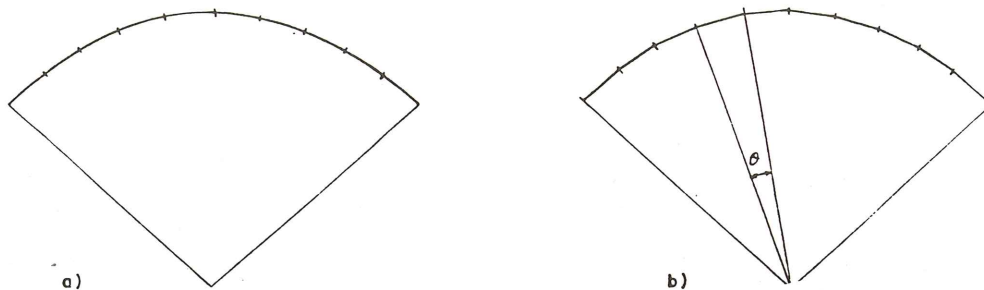


Fig. 4.7.

Una viga curva, de curvatura variable, puede discretizarse de dos maneras diferentes: por una serie de elementos curvos, de curvatura constante (Fig. 4.7.a), o por una serie de elementos rectos inscritos en la curva (Fig. 4.7.b).

El primer procedimiento es perfecto siempre que los elementos circulares se acoplen lo suficientemente bien a los cambios de curvatura. Sin embargo, este procedimiento es poco usado, ya que la matriz de rigidez del elemento curvo es complicada y la determinación de los esfuerzos de empotramiento perfecto no es tan automática como en una viga recta. En la referencia bibliográfica [7] se da la matriz de rigidez de un elemento curvo en planta.

Por estas razones es más frecuente reproducir la viga curva por un conjunto de barras rectas (Fig. 4.7.b). El error cometido por este procedimiento, depende del ángulo  $\theta$  que destaca la viga recta. En la figura 4.8 representamos el porcentaje de error que se comete en las rigideces por este procedimiento, deducido de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\% \text{ error} = \frac{\text{rigidez elemento curvo} - \text{rigidez elemento recto}}{\text{rigidez elemento curvo}} \times 100$$

Como se ve, estos errores dependen del coeficiente  $K = \frac{EI}{GJ}$  y del ángulo  $\theta$  destacado por el elemento. Cuando el valor de  $K$  es próximo a la unidad, que es el caso normal de los puentes curvos, el ángulo  $\theta$  puede ser de 1 ó 2 grados sin que se cometan errores importantes. Si por el contrario los valores de  $K$  son grandes, lo que corresponde a vigas con reducida rigidez a la torsión, los errores son importantes para estos mismos grados.

Siempre que se cumplan estas condiciones, la reproducción de un puente curvo es correcta y muy automática por procedimientos corrientes en toda la programación de ordenadores.

El tablero curvo tipo losa aligerada, puede discretizarse perfectamente bien por un emparrillado de vigas, sin más que cumplir las reglas establecidas en lo que se refiere a los elementos curvos (Fig. 4.9).

Las demás condiciones necesarias para reproducir el comportamiento de la sección transversal, siguen las pautas normales en este procedimiento [8].

La utilización del método del emparrillado para vigas cajón, no es posible, en general, ya que no se puede reproducir la distorsión producida por la flexión longitudinal y la torsión. Únicamente para casos en que, por su gran radio de curvatura, la distorsión debida a la flexión sea muy pequeña (véase figura 3.7), se podrá utilizar el método de cálculo del emparrillado, teniendo en cuenta en la distribución de rigideces de los elementos transversales, la deformación por esfuerzos cortantes que aproxima la distorsión de los puentes rectos.

De la misma manera, el método del emparrillado reproduce mal el caso de tableros de viga, en los cuales el efecto membrana de la losa superior viene incrementado por la componente transversal de las compresiones de la losa.

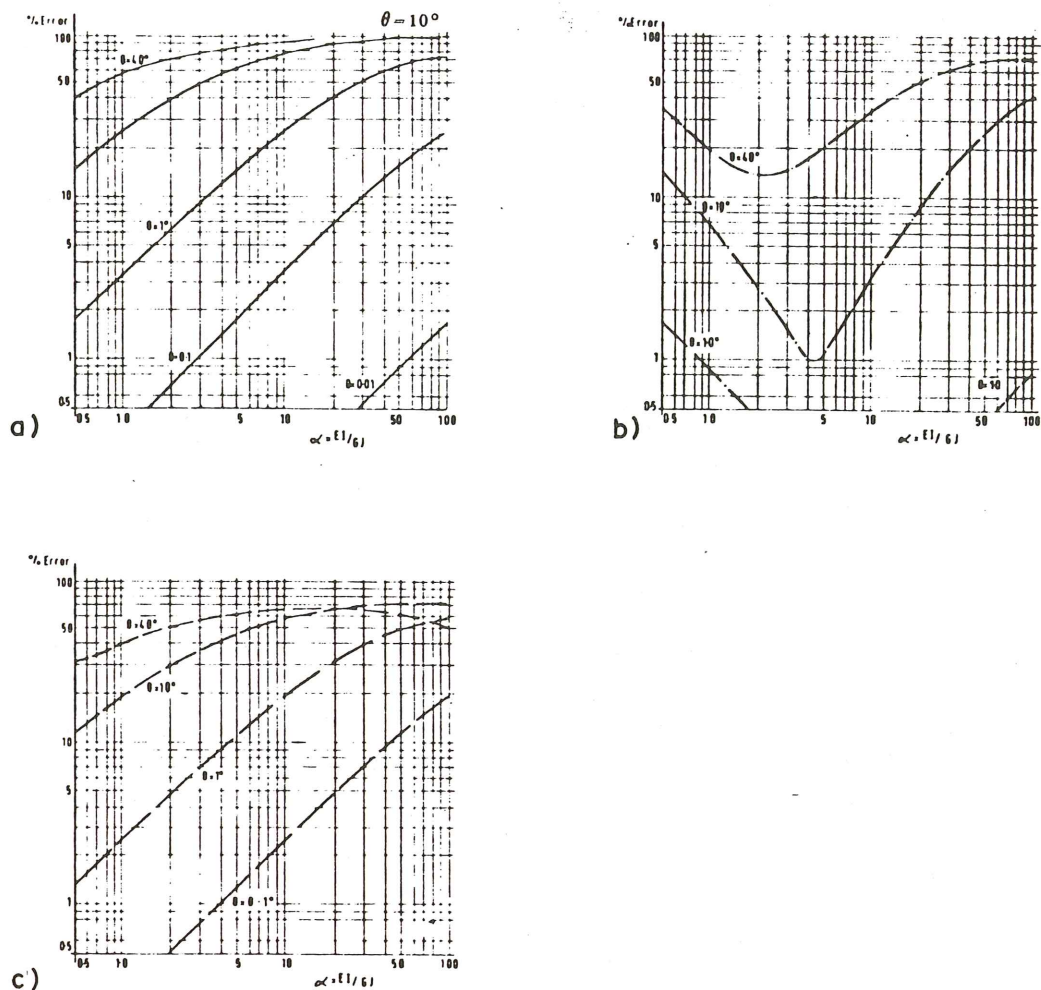


Fig. 4.8. Simulación de elementos curvos por un elemento recto.  
 a) Porcentajes de error en rigidez a flexión.  
 b) " " " torsión.  
 c) " " " cortante (F. Sawko).

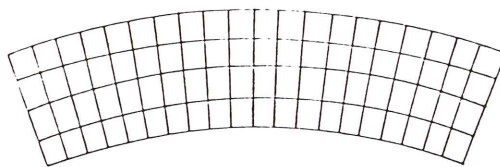


Fig. 4.9.

#### 4.3.2. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es el método más adecuado para reproducir el comportamiento estructural de cualquier estructura.

Para puentes losa, basta utilizar elementos tipo losa, trapeciales o triangulares, con una distribución adecuada, para reproducir la respuesta local ante las cargas puntuales que hacen variar muy rápidamente la ley de momentos flectores.

Para puentes con dimensión espacial (puentes cajón o puentes de vigas), el elemento que hay que utilizar será el elemento lámina. Conviene que los elementos que reproducen el efecto membrana del alma, sean capaces de reproducir un estado de tensión lineal, para así poder disponer un solo elemento en toda el alma y reducir de esta manera la gran cantidad de elementos que harían falta para obtener una reproducción correcta del alma, cuando se utilizan elementos cuya deformación es constante.

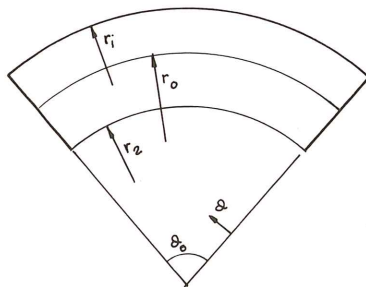
#### 4.4. Métodos armónicos\*

Los métodos armónicos de cálculo que utilizan los desarrollos en serie de Fourier, de la carga y la respuesta, son posibles en aquellas configuraciones de puentes curvos cuyas geometrías y vinculaciones de contorno sean simples:

- Trazados en planta circular.
- Constancia de anchuras, cantos y espesores a lo largo de la luz.
- Comportamiento elástico.

Para el cálculo del tablero losa, existen dos tipos de soluciones. El primero lo constituye el método de la losa ortótropa.

La ecuación diferencial de la losa en estas condiciones toma la forma que se indica en la figura 4.10.



$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D}$$

$$\text{con: } D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

Fig. 4.10.

La solución de esta ecuación puede ser desacoplada y cumplir automáticamente las condiciones de contorno, si establecemos para las cargas y los desplazamientos verticales, las expresiones:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot \theta}{\theta_0}$$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot \theta}{\theta_0}$$

\* Véase: "Análisis de tableros de puentes, por métodos armónicos". J. Manterola, Monografía 343 del Instituto Eduardo Torroja.



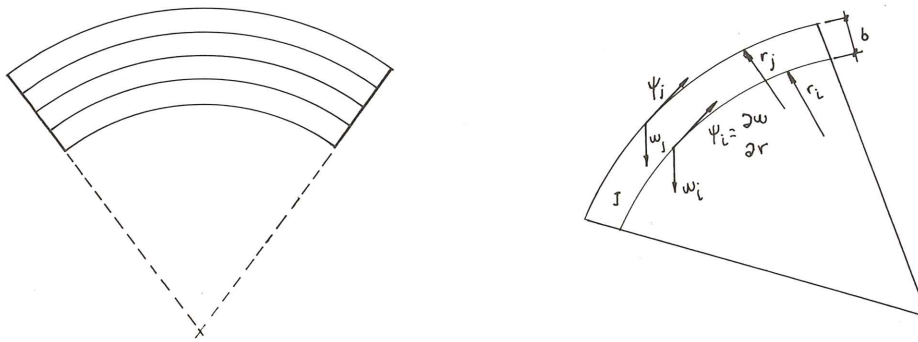


Fig. 4.11.

La integración de esta ecuación diferencial y la expresión de los esfuerzos para cada uno de los términos del desarrollo en serie de Fourier, se encuentra en [9].

El método de las bandas finitas discretiza la losa circular en una serie de bandas circulares de anchura finita. Para cada banda, se establece una función de desplazamiento en función de los desplazamientos generalizados en las líneas de borde ( $w_i, \psi_i, w_j, \psi_j$ ); y de ahí, a partir de la expresión de la curvatura en una losa circular, se obtiene la matriz de rigidez que liga los esfuerzos en el contorno con los desplazamientos del mismo (Fig. 4.11). Es, por tanto, un procedimiento híbrido entre el método de los elementos finitos y el de la losa ortótropa (Véase [9]).

Para el caso del puente cajón, el planteamiento del método de las bandas finitas es similar. Se discretiza el cajón en una serie de bandas de tablero y de alma. En los elementos que discretizan la losa superior e inferior, el comportamiento como placa y el comportamiento como losa están desacoplados, y, por tanto, se puede obtener la matriz de rigidez de ambos mecanismos por separado.

En los elementos de alma, no puede desacoplarse el efecto de placa del efecto de losa; pues las tensiones longitudinales producen flexiones transversales debido a la curvatura plana. La matriz de rigidez debe ser conjunta. Todo el desarrollo de este método para puente cajón, se encuentra en la referencia [9].

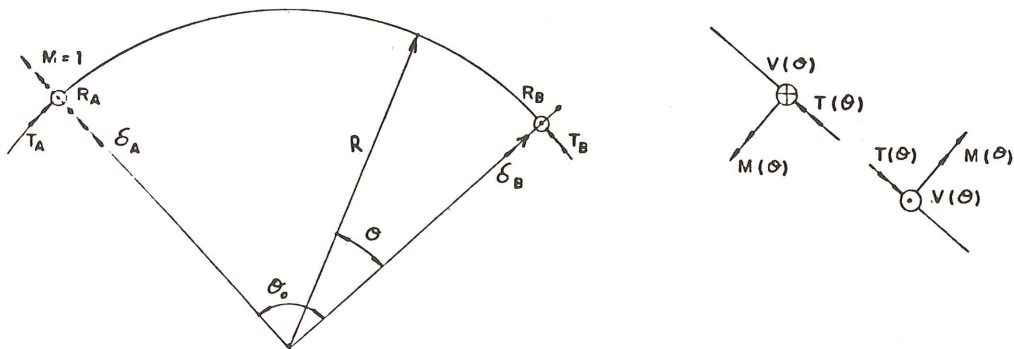
## Bibliografía

- (1) Curved Thin-walled Girders. Theory and analysis. R. Dabrowski. C.A.C.A. TRANSLATION N° 144.
- (2) An approximate method for analysis of box girder Bridges that are curved in plan. W.N.A1. Rifaie. H.R. Evans. IABSE Proceeding P-21/79.
- (3) Analysis and design of curved box girder bridges. C. Meyer. California University, Berkeley. Dic. 1970.
- (4) Stiffness method for Curved Box Girders at initial stress. Z.P. Bazant y M. El Nimeiri. J.S.D.ASCE, Oct. 1974.
- (5) La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica. Javier Manterola. Monografía n° 15 de la Agrupación de Fabricantes de Cemento.
- (6) Theory of box girders. Vladimir Kristek. Wiley Interscience.

- (7) Computer analysis of grillages curved in plan. F. Sawko. Memorias de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras, 1967.
- (8) Cálculo de tableros por el método de emparillado. J. Manterola, Hormigón y Acero nº 122.
- (9) Análisis de tableros de puentes por métodos armónicos. J. Manterola. Monografía 343 del Instituto Eduardo Torroja.
- (10) Analysis of curved folded plate structures. C. Meyer. Universidad de California, Berkeley. PB-193.535. Junio 1970.
- (11) The analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge decks. Y.K. Cheurg. Memorias de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras 1969.
- (12) Analysis of curved box girder Bridges by Finite Strip Method. M.S. Cheurg; Y.K. Cheurg. Memoria de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras, 1971.

### Apéndice 1

Viga curva circular, bi-apoyada, bajo momento flector  $M = 1$  en A



$$R_A = -R_B = -\frac{1}{R \cdot \theta_0} \quad T_A = \frac{1}{\theta_0} - \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \quad T_B = \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\sin \theta_0}$$

$$V(\theta) = -\frac{1}{R \cdot \theta_0}$$

$$M(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}$$

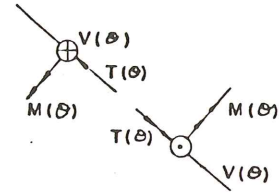
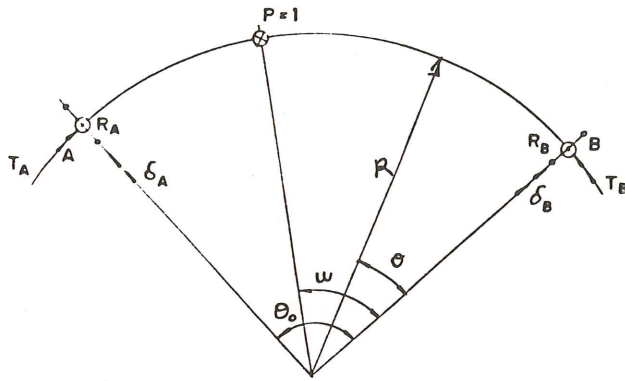
$$T(\theta) = \frac{1}{\theta_0} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0}$$

$$\text{Giro en A: } \delta_A = \frac{R}{EI} \left[ \frac{\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} (1 + K) + K \left( \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right]$$

$$\text{Giro en B: } \delta_B = \frac{R}{EI} \left[ \frac{\theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} (1 + K) + K \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right]$$

$$K = \frac{EI}{G \cdot J}$$

Viga curva circular, bi-apoyada, bajo carga puntual  $P = 1$



$$R_A = \frac{\omega}{\theta_0}; \quad R_B = \frac{\theta_0 - \omega}{\theta_0}; \quad T_A = -R \left( \frac{\omega}{\theta_0} - \frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \theta_0} \right); \quad T_B = R \left( \frac{\theta_0 - \omega}{\theta_0} - \frac{\text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0} \right)$$

$$V(\theta) = -\frac{\theta_0 - \omega}{\theta_0}$$

$$M(\theta) = \frac{\text{sen } \theta \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0} \cdot R$$

$$T(\theta) = R \left( \frac{\theta_0 - \omega}{\theta_0} - \frac{\cos \theta \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0} \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \omega$$

$$V(\theta) = \frac{\omega}{\theta_0}$$

$$M(\theta) = \frac{\text{sen } \omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \theta)}{\text{sen } \theta_0} R$$

$$T(\theta) = \left( -\frac{\omega}{\theta_0} + \frac{\text{sen } \omega \cdot \cos (\theta_0 - \theta)}{\text{sen } \theta_0} \right) R$$

$$\omega \leq \theta \leq \theta_0$$

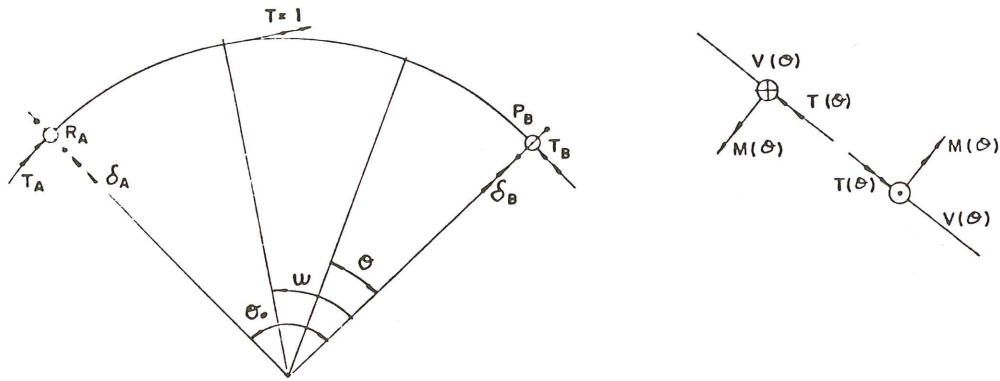
$$\text{Giro en A: } \delta_A = \frac{R^2}{EI} \left[ \frac{\omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega) - (\theta_0 - \omega) \text{sen } \omega \cdot \cos \theta_0}{2 \text{sen}^2 \theta_0} (1 + K) + K \left( \frac{\omega}{\theta_0} - \frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \theta_0} \right) \right]$$

$$\text{Giro en B: } \delta_B = \frac{R^2}{EI} \left[ \frac{\omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega) \cos \theta_0 - (\theta_0 - \omega) \text{sen } \omega}{2 \text{sen}^2 \theta_0} (1 + K) + K \left( \frac{\theta_0 - \omega}{\theta_0} - \frac{\text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0} \right) \right]$$

$$K = \frac{EI}{GJ}$$



Viga curva circular, bi-apoyada, bajo momento torsor  $T = 1$



$$R_A = R_B = 0; \quad T_A = -\frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \theta_0}; \quad T_B = \frac{\text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0}$$

$$V(\theta) \equiv 0$$

$$M(\theta) = -\frac{\text{sen } (\theta_0 - \omega) \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen } \theta_0} \quad \left. \vphantom{M(\theta)} \right\} 0 \leq \theta \leq \omega$$

$$T(\theta) = \frac{\cos \theta \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega)}{\text{sen } \theta_0}$$

$$M(\theta) = -\frac{\text{sen } \omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \theta)}{\text{sen } \theta_0}$$

$$T(\theta) = -\frac{\cos(\theta_0 - \theta) \cdot \text{sen } \omega}{\text{sen } \theta_0} \quad \left. \vphantom{M(\theta)} \right\} \omega \leq \theta \leq \theta_0$$

$$\text{Giro en A: } \delta_A = \frac{R^2}{EI} \frac{(\theta_0 - \omega) \text{sen } \omega \cdot \cos \theta_0 - \omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega)}{2 \text{sen}^2 \theta_0} (1 + K)$$

$$\text{Giro en B: } \delta_B = \frac{R^2}{EI} \frac{(\theta_0 - \omega) \text{sen } \omega - \omega \cdot \text{sen } (\theta_0 - \omega) \cdot \cos \theta_0}{2 \text{sen}^2 \theta_0} (1 + K)$$

$$K = \frac{EI}{GJ}$$

Método aproximado para el cálculo de vigas curvas

El método simplificado de cálculo de vigas curvas, se basa en las dos ecuaciones (1) y (2) que hemos examinado en el apartado 1, y que eran:

$$\frac{dT(\theta)}{ds} = \frac{M(\theta)}{R} + m_t \quad (1)$$

$$\frac{dM(\theta)}{ds} = -\frac{T(\theta)}{R} - V(\theta) \quad (2)$$

y en la cuantía normal de los torsosres y el radio de curvatura en planta.

El valor  $T(\theta)/R$  de la ecuación (2), suele ser muy pequeño y puede despreciarse; especialmente cuando:

- a) El radio de curvatura en planta,  $R$ , es grande.
- b) La viga es continua; pues como hemos visto en el apartado 1, la presencia del momento flector en apoyos reduce la torsión.

Si admitimos este hecho, la ecuación (2) se convierte en:

$$\frac{dM(\theta)}{dS} = -V(\theta)$$

que es la ecuación de equilibrio de una viga recta, cuya longitud es igual a la de la viga curva.

Por tanto, el cálculo de la viga curva se reduce a:

- 1º) Calcular la ley de momentos flectores,  $M(\theta)$ , en la viga curva, como si fuese recta de la misma longitud.
- 2º) Una vez obtenida la ley de  $M(\theta)$ , se divide por  $R$ ; y este valor se añade a los momentos torsosres sollicitación, de la ecuación (1). Tendremos, entonces, que para obtener la ley de momentos torsosres, conocemos el segundo miembro de la ecuación(1).

La ley de momentos torsosres será, entonces, la ley de esfuerzos cortantes de una viga recta cuya carga sea, precisamente:

$$\frac{M(\theta)}{R} + m_t$$

Para que esto sea verdad, las vigas tienen que estar empotradas a torsión en todos los apoyos. Si esto no fuese así, los momentos torsosres adquirirían valores muy altos y no podría eliminarse su influencia en la obtención de  $M(\theta)$ .

De la misma manera, la viga debe ser bastante rígida a la torsión. Si la viga no lo es, ya sea por la forma en que tiene distribuido el material, o porque la fisuración a torsión, en etapas elevadas de carga, haya producido esa reducción en la rigidez, no debe aplicarse este procedimiento.

Para los demás casos, que son los más corrientes en este tipo de vigas, el procedimiento es muy aproximado y fácil de aplicar.

# Cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, referida a grados de libertad seleccionados

A. Recuero  
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos  
Instituto Eduardo Torroja  
Madrid

## RESUMEN

Se presenta un algoritmo que resuelve el siguiente problema:

Dado un sistema de ecuaciones lineales, con matriz simétrica y en banda, del que sólo nos interesa conocer los valores de un número limitado de variables, determinar un sistema de ecuaciones equivalente, al que llamaremos condensado en el que solo intervengan las variables que nos interesan.

El algoritmo que se presenta permite resolver este problema, utilizando para ello la mínima memoria central posible.

El algoritmo ha sido implementado en sendas subrutinas, escritas en FORTRAN IV, una de ellas trabajando exclusivamente en memoria central, y la otra tomando los datos de la matriz a condensar de un disco. Esta segunda subrutina está así mismo diseñada de modo que las transferencias entre el disco y la memoria central son mínimas, gracias a lo cual sus tiempos de ejecución son muy cortos.

## 1. INTRODUCCION

Al aplicar los métodos de discretización para el estudio de un gran número de sistemas físicos, nos encontramos con que su comportamiento viene regido por un conjunto de ecuaciones lineales, de matriz simétrica y en banda. Estas ecuaciones relacionan las acciones que se ejercen sobre el sistema físico con la respuesta del mismo ante ellas.

Para la aplicación de este tipo de métodos al análisis de un sistema físico, éste se discretiza en una serie de subsistemas elementales, cuyo comportamiento es conocido, y que al



ensamblarse constituyen el sistema total. El sistema se esquematiza mediante un conjunto de nudos, en los que se ejercen las acciones exteriores y se determina la respuesta del sistema a éstas. Estos nudos están interconectados por medio de los subsistemas, o elementos que vinculan entre sí dos o más nudos.

El comportamiento de cada uno de los subsistemas que componen el sistema general, se supone conocido antes de proceder a su ensamblaje en el sistema total. Cada uno de estos subsistemas se comportan como "cajas negras", para las cuales, conocidas las acciones que se ejercen en los puntos de conexión conocemos su respuesta, y viceversa.

El análisis del sistema total se produce en dos pasos: En el primero se determina el valor que toman los grados de libertad asignados a los nudos de conexión de subsistemas. En el segundo paso se procede a analizar como se comporta internamente cada subsistema al estar sometido, por una parte, a las acciones que se ejercen sobre él, y por otra, al estar obligado a responder, en los puntos en que está conectado al sistema general, como imponen los resultados de la primera parte del análisis.

Cuando el sistema general es grande puede ser conveniente utilizar como subsistemas elementales configuraciones complejas en lugar de elementos simples. En estos casos, la determinación de la forma de reaccionar estos subsistemas, vistos desde los puntos de conexión no es trivial.

Dentro de estos subsistemas complejos existen dos tipos de grados de libertad: aquellos que corresponden a los puntos de conexión, y los restantes. En la primera parte del análisis no nos interesa determinar el valor que tienen los grados de libertad internos al subsistema, que sí deberán ser tenidos en cuenta en la segunda fase.

En consecuencia, interesa disponer de una herramienta que permita condensar las ecuaciones que rigen el comportamiento del subsistema, a otro conjunto de ecuaciones equivalentes que ligen exclusivamente las acciones y las respuestas en los puntos de conexión externa del subsistema.

El objeto del presente trabajo es la presentación de un algoritmo, que permite la condensación de grados de libertad de un sistema de ecuaciones lineales, simétrico y en banda, optimizando la memoria central requerida en el proceso.

Dentro del campo del análisis matricial de estructuras, el algoritmo presenta interés en aspectos tales como la determinación de la matriz de rigidez lateral de un edificio, el diseño de macroelementos estructurales que contienen grados de libertad internos, y que son de aplicación tanto en el campo de elementos finitos, como en el de análisis por medio de subestructuras. Ver figura 1.

Generalmente, el algoritmo podrá utilizarse trabajando exclusivamente en memoria central, ya que la matriz de rigidez a condensar corresponderá a una parte de la estructura total. No obstante se presentan dos versiones del algoritmo, una empleando únicamente la memoria central, y otra utilizando el disco como medio de almacenamiento de la matriz de rigidez a condensar.

En este último caso, se han utilizado las mismas técnicas expuestas en la referencia 6, por lo que a la utilización de la memoria y a las transferencias entre ésta y el disco se refiere. De este modo se obtiene un rendimiento óptimo, tanto en el aprovechamiento de la memoria central, como en el tiempo de ejecución.

## 2. PLANTEAMIENTO TEORICO DEL PROBLEMA

Consideremos un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas

$$Ax = b \quad (1)$$

donde no nos interesa conocer el valor de las incógnitas  $x_1$  a  $x_p$ .

Estableciendo las particiones adecuadas, podemos escribir el sistema de ecuaciones (1) de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde no nos interesa conocer  $x_1$ .

Si transformamos el sistema, mediante operaciones con filas, en otro equivalente, de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $A_{21}^*$  es una matriz nula, el sistema de  $(n - p) \times (n - p)$  ecuaciones

$$A_{22}^* x_2 = b_2^* \quad (4)$$

nos permite determinar los valores de las incógnitas que se desea conocer, sin necesidad de determinar explícitamente las variables que no interesan. Podemos decir que este sistema de ecuaciones es una condensación del general.

Teóricamente, la forma de obtener esta matriz condensada sería la siguiente:

Del sistema

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 &= b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (5)$$

tendríamos que:

$$x_1 = A_{11}^{-1} (b_1 - A_{12} x_2) \quad (6)$$

y por consiguiente:

$$[A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}] \cdot x_2 = b_2 - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot b_1 \quad (7)$$

de donde:

$$A_{22}^* = A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \quad (8)$$

$$b_2^* = b_2 - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot b_1 \quad (9)$$

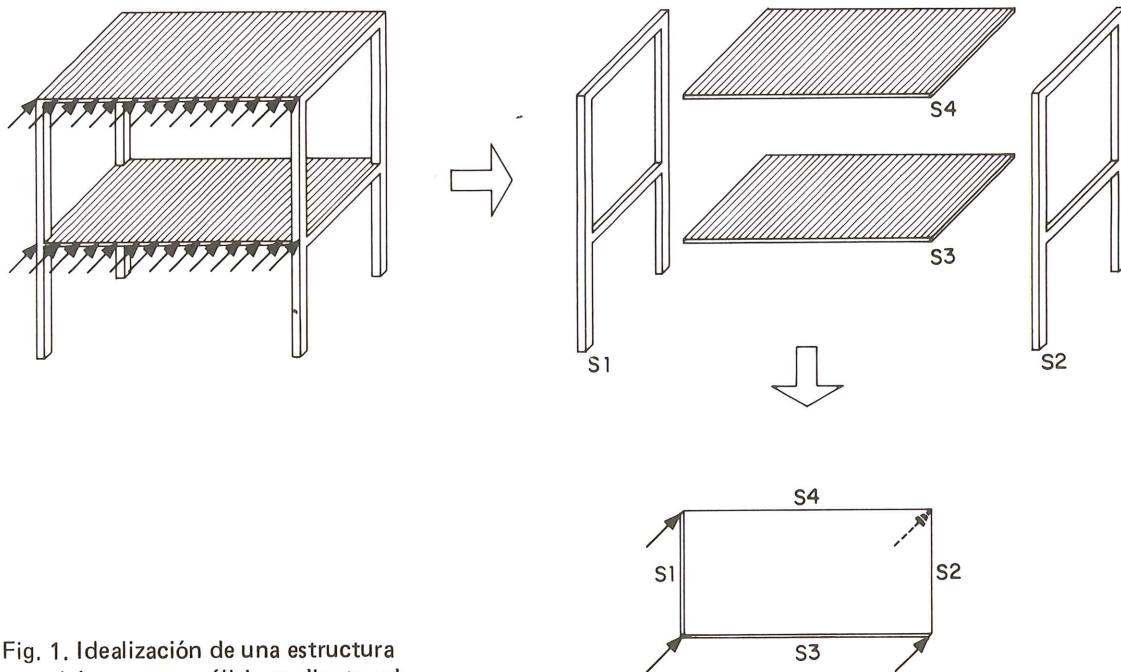


Fig. 1. Idealización de una estructura compleja para su análisis mediante subestructuras

Un modo práctico de abordar este proceso, basado en el proceso de triangulación del método de eliminación de Gauss, sería:

Utilizar la primera fila para poner a cero todos los elementos de la primera columna inferiores a la diagonal. A continuación utilizar la segunda para poner a cero todos los elementos de la segunda columna inferiores a la diagonal principal, y así sucesivamente, hasta la fila  $p$ -ésima.

Si la matriz  $A$  fuese simétrica, las sucesivas submatrices resultantes de suprimir las “ $i$ ” primeras filas y columnas, después de haber anulado los coeficientes de las “ $i$ ” primeras columnas, por debajo de la diagonal principal, seguiría siendo una matriz simétrica.

Así mismo, si la matriz  $A$  fuese en banda, la submatriz mencionada conservaría esta característica. Pero aquí hay que señalar que esto solo se cumpliría en el caso en que las incógnitas que nos interesan fuesen las  $n - p$  últimas variables.

Si las variables que nos interesan no fuesen las últimas, al tratar de desplazarlas a las últimas posiciones, mediante los oportunos intercambios de filas y columnas, se perdería esta característica de la matriz, y el consiguiente ahorro de memoria y de operaciones que implica tener en cuenta su forma en banda.

Consideremos ahora una subestructura, o una estructura completa, de la que tan solo nos interesa conocer de modo explícito, el efecto que produce en ciertos grados de libertad la aplicación de cargas duales de los mismos. Los restantes grados de libertad pueden considerarse como internos al sistema.

El sistema de ecuaciones lineales a que conduce el análisis de este problema es precisamente del tipo anteriormente descrito. La matriz  $A$  sería la matriz de rigidez de la estructura o subestructura completa. El vector  $b_2$  constituye un sistema de cargas equivalentes a las actuantes visto desde los grados de libertad que se desea conservar. Si los nudos internos estuviesen descargados, el vector  $b_1$  sería nulo y, en consecuencia, el vector  $b_2^*$  coincidiría con el  $b_2$ .



La matriz A será simétrica y en banda, pero los grados de libertad a conservar estarán situados de forma irregular, dentro de la ordenación que se haya hecho en los mismos con objeto de reducir el ancho de banda.

El algoritmo que aquí se presenta permite obtener la matriz de rigidez condensada, utilizando exclusivamente como área de trabajo la parte de memoria central destinada a alojar la semibanda de la matriz de rigidez total, y la zona triangular superior de la matriz de rigidez condensada, ya que ésta será una matriz cuadrada, simétrica y completa.

Si bien en algunas ocasiones podría producirse aún un mayor ahorro de memoria, utilizando para almacenar la matriz condensada la propia semibanda de la matriz de rigidez general, esto sólo es posible en algunos casos particulares de estructuras.

### 3. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

Los datos de partida son:

- La matriz de rigidez de la estructura completa. Se considera formada por NEQU ecuaciones, con un semiancho de banda NT. La forma de estar almacenados estos coeficientes podrá ser cualquiera. En lo que sigue se supone descrita por una matriz A, con un solo subíndice, de NEQU x NT elementos. Los NT primeros elementos corresponden a la primera ecuación, las NT siguientes a la segunda, etc. El primer término almacenado, de cada ecuación es el de la diagonal principal.
- Grados de libertad a conservar. El número de grados de libertad a conservar es NG. La relación ordenada de los números de ecuación correspondientes a dichos grados de libertad está contenida en la matriz IG, de NG elementos.

El resultado del algoritmo será una matriz cuadrada, de NG x NG elementos, simétrica. El algoritmo devuelve la zona triangular superior de esta matriz almacenada en una matriz B, con un solo subíndice. Los NG elementos de la primera fila serán los NG elementos de B. A continuación irán los NG-1 elementos de la segunda fila, y así sucesivamente, siendo en cada fila el primer elemento el correspondiente a la diagonal principal. B tendrá NG (NG+1)/2 elementos.

El área de trabajo utilizada por el algoritmo se reduce a las matrices A y B, anteriormente citadas.

Para facilitar el trabajo con las matrices A, B e IG, se utilizan las siguientes funciones:

INDEX (I, J, NT), determina la dirección en A del elemento teórico  $a_{IJ}$  de la matriz de rigidez completa, teniendo en cuenta las peculiaridades que más abajo se expondrán.

IND (I, J), determina la dirección en la matriz B del elemento teórico  $b_{IJ}$ , de la matriz de rigidez condensada.

IN (I, IG, NG), determina si el número de ecuación I está contenido en la lista IG, tomando el valor cero en caso contrario.

#### 3.1. Descripción del proceso

Se tomará cada una de las ecuaciones del sistema, desde las 1 hasta las NEQU-1. Llamaremos I a la fila en curso. Se calcularán las variables auxiliares  $I1=I+1$  y  $JFIN=I+NT-1$   $\nabla$  NEQU. Los coeficientes de la ecuación I contenidos en la semibanda serán los comprendidos entre  $a_{I1}$  y  $a_{I JFIN}$ .

Si la ecuación I corresponde a un grado de libertad a conservar, no se hará nada con ella.

En cambio, si corresponde a un grado de libertad a eliminar, se seguirá el proceso típico de triangulación de matrices simétricas en banda, para poner a cero los coeficientes  $a_{J I}$ , variando  $J$  desde  $I+1$  hasta  $JFIN$ .

Al terminar esta parte del proceso, faltará todavía anular los coeficientes  $a_{J I}$  en los que  $J$  es el número de ecuación correspondiente a un grado de libertad a conservar, e  $I$  el correspondiente a un grado de libertad a eliminar, con la condición que  $J$  sea menor que  $I$ . Esto se debe a que, en el proceso anterior, una fila  $I$  ha afectado a las filas  $J$  cuya numeración es posterior, pero no a aquellas filas  $J$  cuya numeración es anterior y que teóricamente debiera ser posterior, por corresponder a grados de libertad a conservar.

Sin embargo, al tratar de hacer esta parte del proceso, dejan de ser nulos coeficientes de la fila  $J$  exteriores a la semibanda que se conserva. Por esta razón, teóricamente estas filas debieran expandirse para poder albergar estos coeficientes.

El tratamiento que se va a dar a estos coeficientes constituye la novedad del algoritmo presentado.

Consideremos la ecuación  $J=IG(L)$ , donde  $L$  varía desde 1 hasta  $NG$ : Primero se separarán los coeficientes  $a_{JK}$  donde  $k=IG(L)$  y  $L$  varía desde  $L$  hasta  $NG$ , con la condición de que  $K$  no supere el menor de los valores  $JFIN2=J+NT-1$  y  $NEQU$ . Estos valores se alojarán en la fila  $L$  y columna  $L$  de la matriz  $B$ , sustituyendo por 0 el valor de la posición donde anteriormente se alojaban.

Tomaremos entonces cada una de las ecuaciones  $I$ , que correspondan a grados de libertad a eliminar, comprendidas entre las  $J+1$  y las  $NEQU$ . Utilizaremos esta ecuación para anular el coeficiente  $a_{JI}$ . En este proceso los elementos  $a_{IK}$  modificarán a los  $a_{JK}$ , donde  $K$  varía desde  $J$  hasta  $JFIN$ .

Analicemos ahora cual debe ser el proceso, según el valor del subíndice  $K$ , para  $K$  comprendido entre  $J$  e  $I-1$ . Ya han sido anulados todos aquellos coeficientes que corresponden a grados de libertad a eliminar, por lo que solo hay que considerar aquellos que corresponden a grados de libertad a conservar.

El elemento  $a_{JK}$  reside ahora en la matriz  $B$ , como se indicó más arriba. El elemento  $a_{IK}$  está situado a la izquierda de la banda conservada, por lo cual deberá buscarse en la posición simétrica  $a_{KI}$ , entre los coeficientes de una ecuación a conservar.

Para los valores de  $K$  entre  $I$  y  $JFIN2$ , tendremos de nuevo que distinguir entre que  $K$  corresponda a un grado de libertad a conservar o eliminar. En el primer caso, el elemento  $a_{JK}$  residirá ahora en  $B$ , y en el segundo caso en su posición original. En ambos casos, el elemento  $a_{IK}$  se encontrará en su posición original.

Para los valores de  $K$  superiores a  $JFIN2$ , los elementos  $a_{IK}$  estarán en su posición original, pero los elementos  $a_{JK}$  son exteriores a la semibanda. Si  $K$  corresponde a un grado de libertad a conservar estarán en la matriz  $B$ , como en los casos anteriores.

Cuando  $I=J+1$ , el único elemento que se altera fuera de la semibanda será el  $a_{J JFIN}$ . Pero en este momento sabemos que el elemento  $a_{JI}$  es nulo, pues lo acabamos de anular, y no va a dejar de serlo en lo sucesivo. En consecuencia, podemos almacenar el elemento exterior a la semibanda en la posición que ocupaba el elemento  $a_{JI}$ . Procediendo de este modo con cada nueva ecuación  $I$ , podrán irse alojando sucesivamente, dentro de los espacios que han quedado libres en la semibanda, aquellos valores que realmente están situados fuera de ella.

Terminada esta segunda parte del proceso, el algoritmo queda completado.

La mayor peculiaridad del algoritmo radica en la forma de almacenar los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a grados de libertad a conservar. Trataremos de aclarar el procedimiento mediante un ejemplo.



Supongamos un sistema de 12 ecuaciones, con un semiancho de banda de 6, y que los grados de libertad a conservar son los 1, 4 y 7. Las tablas 1 y 2 muestran donde se pueden localizar, en cada momento, los coeficientes correspondientes a la ecuación 1.

### 3.2. Modificación del proceso en el caso de que la matriz a condensar resida en el disco

Cuando la matriz de rigidez de la estructura completa esté almacenada en disco, ya sea porque no pueda residir en memoria central, o porque el programa empleado así lo requiera, es recomendable conjugar las ideas arriba expuestas con las contenidas en la referencia 6, con objeto de optimizar el uso de la memoria central y los tiempos de transferencia entre el disco y la misma.

Con tal fin, se propone el siguiente esquema de trabajo:

Para la primera parte del algoritmo puede aplicarse exactamente lo expuesto en la referencia citada, sin más modificación que la de no operar con las ecuaciones correspondientes a grados de libertad a conservar sobre las ecuaciones posteriores. Por lo que a la segunda parte se refiere, el esquema que se propone requiere que residan en memoria central:

La parte triangular superior de la matriz B. Esta matriz puede ocupar las  $NG(NG+1)/2$  primeras posiciones del área de trabajo. Esta matriz va a ser continuamente modificada, por lo que es preferible que resida en memoria central.

La parte de semibanda correspondiente a las ecuaciones de grados de libertad a conservar. Esta parte ocupará las  $NG \times NT$  siguientes posiciones del área de trabajo.

Los coeficientes contenidos en esta zona, además de ser continuamente modificados, corresponden también a filas que van a actuar como modificadoras, por lo cual deben residir en memoria central.

El resto del área de trabajo deberá dedicarse a albergar, sucesivamente, cuantas ecuaciones sea posible, de las que van a actuar modificando el contenido de los dos primeros bloques. Por este área irán pasando sucesivamente los coeficientes contenidos en la semibanda, correspondientes a las ecuaciones de grados de libertad a eliminar, con numeración posterior al primer grado de libertad a conservar. Ver figura 2.

La segunda parte del algoritmo utiliza la misma estrategia de transferencia de información entre el disco y la memoria central que la referencia citada. Otra distribución del área de trabajo implicaría un aumento notable en el número de transferencias, con la siguiente caída en los tiempos de ejecución.

## 4. INFLUENCIA DEL ESQUEMA DE ALMACENAMIENTO DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ A

Con vistas a la mejor utilización de la memoria central, es conveniente discutir el esquema de almacenamiento de los coeficientes de la matriz a condensar. Sin embargo hay que advertir que este es un condicionamiento al algoritmo, que viene dado por el modo como el programa principal genera y almacena la citada matriz.

Cuando la matriz A reside en disco, la disposición más conveniente de sus elementos, de acuerdo con lo expuesto en la referencia 6, es organizar A en  $NEQU$  filas de  $NT$  elementos cada una, y situar estas filas una tras otra.

La versión del algoritmo que se incluye, para el caso en que la matriz a condensar resida en disco, supone este esquema de almacenamiento de los coeficientes de la matriz A.



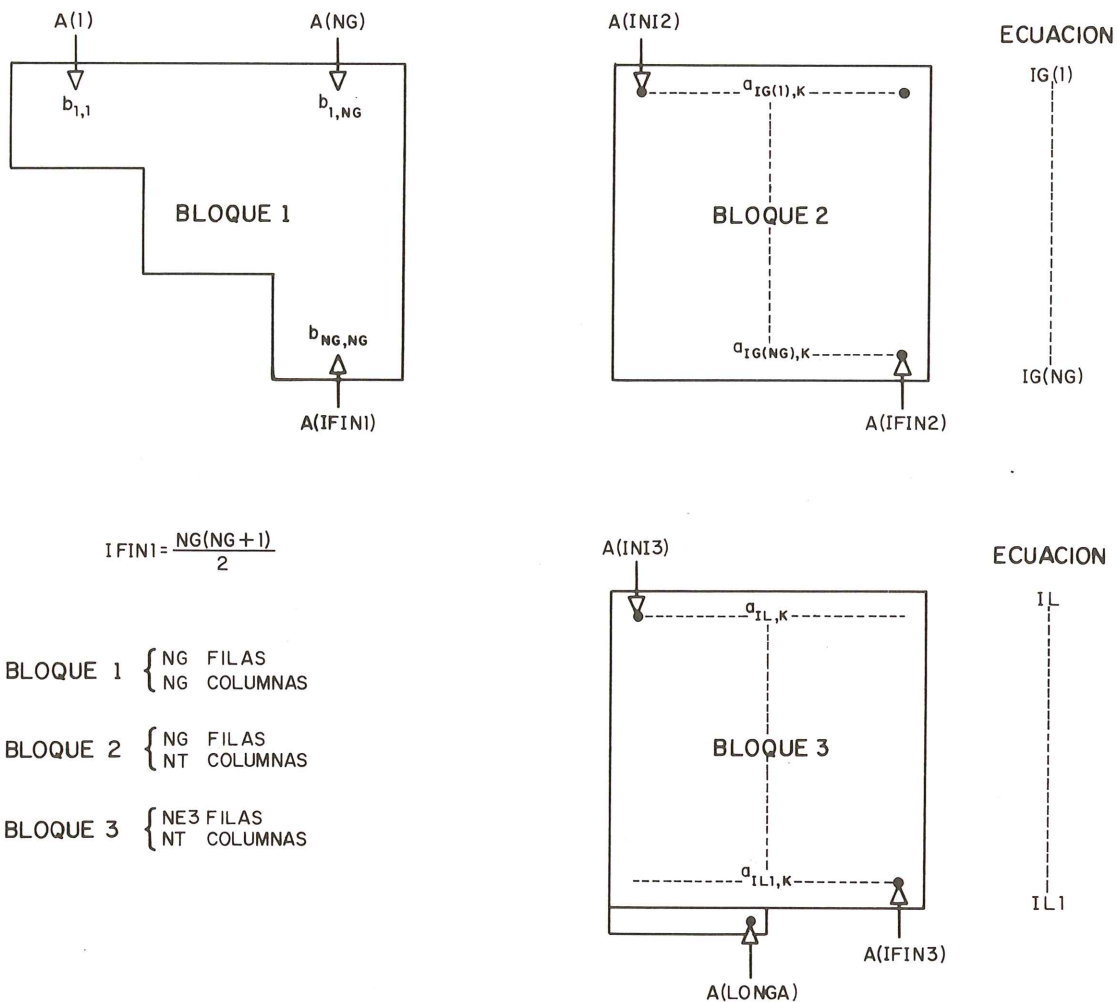


Fig. 2. División del área de trabajo en 3 bloques, en la segunda parte del algoritmo para la subrutina DELIM.

Cuando el proceso se realiza trabajando exclusivamente en memoria central, es evidente que este esquema de almacenamiento de la matriz A no es el más económico. Por una parte, existirán dentro de la semibanda una serie de coeficientes, perfectamente localizables, que van a ser nulos a lo largo de todo el proceso. Por otra parte, las NT-1 últimas ecuaciones contienen una serie de coeficientes de relleno, cuyo único objeto es facilitar el direccionamiento de los elementos de A.

Las referencias 1, 2, 3, 4 y 5 presentan una diversidad de esquemas de almacenamiento de los coeficientes de A más económicos.

El más sencillo de ellos, presentado en la referencia 1, permite prescindir de los coeficientes de relleno del triángulo inferior de la semibanda. Este esquema ordena los coeficientes de la matriz por columnas. El direccionamiento es ligeramente más complicado. El algoritmo del triángulo reducido, presentado en la citada referencia, es perfectamente aplicable a la primera parte del algoritmo que aquí se describe; sin embargo, para la segunda parte del mismo el proceso se complica notablemente ya que la comodidad del método del triángulo reducido para modificar los coeficientes inferiores de una columna, desaparece cuando se deben modificar elementos de la columna por encima del coeficiente modificador.

Los esquemas denominados de ancho de banda variable, referencias 4 y 5, representan una mejora sobre el del triángulo reducido, tienen el inconveniente suplementario de que, de

nuevo en la segunda parte del algoritmo, la forma peculiar de almacenar los coeficientes situados fuera de la banda que se conserva, perturba el esquema de banda variable. No resulta pues recomendable intentar su uso.

Con mucho mayor motivo, y por análogas razones, no es recomendable el uso de los esquemas de direccionamiento que almacenan el número estricto de coeficientes que en algún momento pueden no ser nulos.

En cualquier caso, y con objeto de proporcionar una mayor flexibilidad al uso del programa, la versión que se presenta del algoritmo para memoria interna, utiliza la función INDEX para el direccionamiento de los elementos de la matriz A. Ello permite, mediante la adecuada programación de la función INDEX, utilizar el esquema de direccionamiento que se desee. La versión de la función INDEX que se incluye, utiliza el mismo esquema de direccionamiento utilizado en la versión para disco.

Veamos ahora algunas consideraciones que pueden mejorar este esquema de direccionamiento.

Hay que señalar, en primer lugar, que en los casos normales, la matriz A no va a ser muy dispersa, ni con fuertes oscilaciones en su ancho de banda. Considérese por ejemplo, el caso de la matriz de rigidez lateral de un pórtico plano. Dependiendo de las condiciones particulares del problema puede considerarse la adopción de técnicas como las que se describen a continuación.

Tras la primera parte del algoritmo, las  $(IG(1)-1) \times NT$  primeras posiciones de A, quedan disponibles. Si la matriz B pudiese estar contenida en estas posiciones, podría utilizarse como matriz B la propia matriz A. En caso contrario, podría producirse un desplazamiento de todos los coeficientes de la matriz A de  $NG(NG+1)/2 - (IG(1)-1) \times NT$  posiciones, y albergar la matriz B en las primeras posiciones de A.

En el caso en que NG fuese menor que NT, podría utilizarse para almacenar B, la zona de coeficientes ficticios del triángulo inferior de la semibanda de A. Esto requeriría una modificación de la función IND, que determina las posiciones en que se alojan los coeficientes de B. Esta segunda posibilidad es menos general que la primera, pero puede resultar útil si se dan las circunstancias adecuadas.

## 5. PROGRAMACION DEL ALGORITMO

El algoritmo ha sido programado en FORTRAN IV, y probado en un ordenador HP 21 MX. Se han realizado dos versiones distintas del mismo: Una trabajando exclusivamente en memoria central, y otra utilizando el disco como medio de almacenamiento periférico.

En la primera de las versiones, la subrutina principal se ha denominado ELIM. Utiliza, como funciones auxiliares, las INTEGER FUNCTION IN e INDEX. Los listados de la subrutina principal, junto con los de las funciones auxiliares, figuran en el apéndice 1.

Los parámetros de la subrutina y de las funciones se corresponden con los nombres utilizados en la descripción del algoritmo, por lo que no es preciso dar una mayor explicación.

En los listados aparecen comentarios aclaratorios, que permiten seguir con facilidad el proceso.

La segunda versión consta de la subrutina principal DELIM, de las INTEGER FUNCTION IN e INDIST, y de la subrutina auxiliar TRANS.

En la lista de parámetros de la subrutina DELIM, el significado de los parámetros tiene algunas diferencias con los de la subrutina anterior.

En este caso, la matriz A, de dimensión LONGA, representa el área de trabajo, ya que



la matriz de rigidez a condensar reside en disco, en un archivo cuyo bloque de datos de control es la matriz NF1.

No figura el parámetro B, donde reside la zona triangular superior de la matriz condensada, puesto que coincide con las primeras posiciones del área de trabajo A.

Los restantes parámetros conservan el significado que se ha utilizado en la descripción del algoritmo.

Para la primera parte del algoritmo se ha modificado la subrutina TRIAN, de la referencia 6, eliminando de ella las partes innecesarias, e introduciendo la condición de que una ecuación correspondiente a un grado de libertad a conservar no modifique las ecuaciones posteriores.

Para la segunda parte del algoritmo, el área de trabajo A se ha dividido en tres bloques, del siguiente modo:

- A (1) hasta A(IFIN1) contiene la matriz B.
- A (INI2) hasta A(IFIN2) contiene los restantes coeficientes de las ecuaciones correspondientes a grados de libertad a conservar.
- A (INI3) hasta A(LONGA) contiene los coeficientes de la semibanda de todas aquellas ecuaciones que vayan a modificar los coeficientes contenidos en los dos primeros bloques, y que quepan en dicha zona.

Se ha sustituido la función INDEX por la función DIST, que da la distancia del coeficiente  $a_{IJ}$  al  $a_{II}$ , de acuerdo con la forma especial de almacenar los coeficientes que se utiliza en este algoritmo.

La subrutina TRANS se ha tomado íntegramente de la referencia citada, y su objeto es realizar las transmisiones de datos entre la memoria central y el disco.

Los listados de las subrutinas y funciones mencionadas aparecen en el apéndice 2. Los listados contienen comentarios que facilitan el seguimiento del proceso que se realiza.

## EJEMPLOS Y TIEMPO DE EJECUCION

Para probar el comportamiento de las subrutinas presentadas, éstas han sido utilizadas en el cálculo de la matriz de rigidez lateral de una serie de pórticos planos.

Las características de dichos pórticos son (véase figura 3):

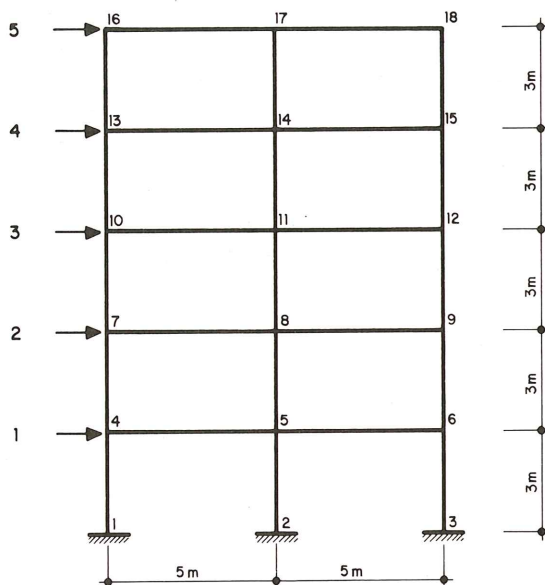
- NP pisos y NV vanos.
- El número total de grados de libertad de la matriz de rigidez completa es  $NEQU = 3x(NP+1)x(NV+1)$ .
- El semiancho de banda del sistema de ecuaciones resultante es  $NT = 3x(NV+2)$ .
- Los grados de libertad a conservar son los correspondientes al desplazamiento lateral del primer nudo de cada piso. Por consiguiente  $NG = NP$ .

El computador empleado es un HP-21MX, con sistema operativo RTE II, y con un disco HP-7905A.

Los tiempos de ejecución del algoritmo, en segundos, se recogen en la tabla 3, en las siguientes columnas:

- a, Subrutina ELIM.
- b, Subrutina DELIM.
- $b_1$ , LONGA = 500
- $b_2$ , LONGA = 1000
- $b_3$ , LONGA = 3000





$$NV=2 \quad NP=5$$

$$IG = \{10, 19, 28, 37, 46\}$$

SECCIONES : PILARES  $30 \times 30 \text{ cm}^2$   
 VIGAS  $30 \times 50 \text{ cm}^2$   
 $E = 1.000.000 \text{ Mp/m}^2$

Fig. 3. Pórtico ejemplo.

De los resultados de la tabla 3 se deduce la escasa influencia que tienen las transferencias de datos de disco a memoria central, en los tiempos de ejecución, gracias a la adecuada organización de las mismas.

Se incluye, así mismo, la matriz de rigidez lateral del primer ejemplo, el que corresponde a dos vanos y cinco pisos, suponiendo las siguientes características de la estructura:

- Todos los pilares son de  $30 \times 30 \text{ cm}$ . de sección.
- Todas las vigas son de  $30 \times 50 \text{ cm}$ . de sección.
- La altura de pisos es de 3 m.
- Las luces de los vanos son de 5 m.
- El módulo de elasticidad es  $E = 1.000.000 \text{ Mp/m}^2$

La tabla 4 contiene la solución proporcionada por el algoritmo: la mitad superior de la matriz de rigidez lateral de este pórtico.

## 7. CONCLUSIONES

El algoritmo que se presenta resuelve el problema, que aparece con frecuencia en las aplicaciones técnicas, cuando se trata de analizar un sistema físico, cuyo comportamiento viene regido por un sistema de ecuaciones lineales, simétrico y en banda, y nos interesa comprobar cómo reacciona el sistema físico, en una serie de puntos determinados, cuando se introducen acciones en dichos puntos. El resto del sistema físico se comporta a estos efectos como una "caja negra", que responde adecuadamente a las acciones introducidas, pero de la que no nos interesa conocer que ocurre dentro.

Se presenta en aplicaciones tales como el cálculo de la matriz de rigidez lateral de una estructura, el análisis de grandes estructuras por medio de subestructuras, la eliminación de grados de libertad internos en elementos finitos complejos, o en otros tipos de problemas como el análisis de redes de distribución de agua o de energía eléctrica.

La novedad que aporta el algoritmo reside en la forma de almacenar los coeficientes que, estando situados fuera de la semibanda que se conserva, dejan de ser nulos a lo largo del proceso de eliminación de las variables que no interesan. Esto permite, en el caso de trabajar sólo en memoria central resolver el problema "in situ", esto es utilizando como área de trabajo el área estricta de datos y de resultados. Así mismo, se indica cómo puede superponerse el área de resultados a la de datos, en ciertos casos.

El algoritmo se ha programado en FORTRAN IV, y se incluyen dos versiones del mismo: una trabajando exclusivamente en memoria central, y otra suponiendo que la matriz a condensar reside en disco.

En este último caso, la subrutina presentada minimiza los tiempos de ejecución para una memoria central dada, gracias a una adecuada compartimentación del área de trabajo, y a la forma de organizar las transferencias de datos entre la memoria central y el disco.

## REFERENCIAS

1. Morán, F.: Resolución de sistemas de ecuaciones simétricos en banda con un ordenador de memoria central reducida. Comunicación a las I Jornadas Nacionales de Aplicación de la Informática a la Ingeniería Civil, Centro de Informática de Ingenieros de Caminos, Madrid (1972).
2. Mondkar, D.P. y Powell, G.H.: Large Capacity Equation Solver for Structural Analysis. Com. and Struct. Vol. 4, August 1974, pp 699-728.
3. Wilson, E.L., Bathe, J. y Doherty, W.P.: Direct Solution of Large Systems of Linear Equations. Computers and Struct. Vol. 4, pp 363-372 (1974).
4. Felippa, C.A.: Solution of Linear Equations with Skyline-stored symmetric matrix. Com. and Struct. Vol. 5, No. 1, August 1975, pp 13-29.
5. Recuero, A y Gutierrez, J.P.: Consideraciones sobre la formación de la matriz de rigidez de una estructura. Monografía No. 356 del Instituto Eduardo Torroja. Madrid, febrero, 1979.
6. Recuero, A. y Gutierrez, J.P.: A Direct Linear System Solver With Small Core Requirements. International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 633-645 (1979).

TABLA 1  
Situación del elemento  $A_{1j}$  después de terminar la actuación de la ecuación I

Fila I	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$	$a_{1,9}$	$a_{1,10}$	$a_{1,11}$	$a_{1,12}$
1	B(1)	A(2)	A(3)	B(2)	A(5)	A(6)	—	—	—	—	—	—
2	B(1)	—	A(3)	B(2)	A(5)	A(6)	B(3)	—	—	—	—	—
3	B(1)	—	—	B(2)	A(5)	A(6)	B(3)	A(3)	—	—	—	—
4	B(1)	—	—	B(2)	A(5)	A(6)	B(3)	A(3)	—	—	—	—
5	B(1)	—	—	B(2)	—	A(6)	B(3)	A(3)	A(4)	A(5)	—	—
6	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	—
7	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	—
8	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	—	A(4)	A(5)	A(6)	A(2)
9	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	—	—	A(5)	A(6)	A(2)
10	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	—	—	—	A(6)	A(2)
11	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	—	—	—	—	A(2)
12	B(1)	—	—	B(2)	—	—	B(3)	—	—	—	—	—

**TABLA 2**

Contenido de las variables A(1) hasta A(6) y B(1) hasta B(3) al terminar de considerar la actuación de la Fila I

Fila I	A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	B(1)	B(2)	B(3)
1	—	a <sub>1,2</sub>	a <sub>1,3</sub>	—	a <sub>1,5</sub>	a <sub>1,6</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	—
2	—	—	a <sub>1,3</sub>	—	a <sub>1,5</sub>	a <sub>1,6</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
3	—	—	a <sub>1,8</sub>	—	a <sub>1,5</sub>	a <sub>1,6</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
4	—	—	a <sub>1,8</sub>	—	a <sub>1,5</sub>	a <sub>1,6</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
5	—	—	a <sub>1,8</sub>	a <sub>1,9</sub>	a <sub>1,10</sub>	a <sub>1,6</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
6	—	—	a <sub>1,8</sub>	a <sub>1,9</sub>	a <sub>1,10</sub>	a <sub>1,11</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
7	—	—	a <sub>1,8</sub>	a <sub>1,9</sub>	a <sub>1,10</sub>	a <sub>1,11</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
8	—	a <sub>1,12</sub>	—	a <sub>1,9</sub>	a <sub>1,10</sub>	a <sub>1,11</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
9	—	a <sub>1,12</sub>	—	—	a <sub>1,10</sub>	a <sub>1,11</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
10	—	a <sub>1,12</sub>	—	—	—	a <sub>1,11</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
11	—	a <sub>1,12</sub>	—	—	—	—	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>
12	—	—	—	—	—	—	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,7</sub>

**TABLA 3**

Tiempos de ejecución de las subrutinas ELIM y DELIM, en segundos

Datos de la estructura				Tiempos de ejecución en sg.			
NP = NG	NV	NEQ	NT	ELIM (a)	DELIM (b)		
					b1 LONGA = = 500	b2 LONGA = = 1000	b3 LONGA = = 3000
5	2	54	12	2,60	3,62	3,42	3,41
10	3	132	15	19,38	24,01	23,27	22,62
15	3	192	15	51,65	59,04	58,03	56,77
20	5	378	21	—	—	238,23	235,82
25	6	546	24	—	—	550,60	540,42
30	7	744	27	—	—	—	1.095,46

**TABLA 4**

Coefficientes de la matriz de rigidez lateral del pórtico de la figura 3

Fila	Columna				
	1	2	3	4	5
1	0,163279E+04	-0,848074E+03	0,826508E+02	-0,620049E+01	0,245637E+01
2		0,152607E+04	-0,840101E+03	0,815714E+02	-0,327768E+01
3			0,152511E+04	-0,838514E+03	0,769013E+02
4		SIMETRICA		0,150729E+04	-0,744648E+03
5					0,667621E+03



APENDICE 1. LISTADO DE  
SUBROUTINE ELIM  
INTEGER FUNCTION IN  
INTEGER FUNCTION INDEX

Correspondiente a la versión del algoritmo que emplea exclusivamente memoria central.

PAGE 0001 FTN4 COMPILER: HP24177 (SEPT. 1974)

```
0127      INTEGER FUNCTION IN(I,IG,NG)
0128 C
0129 C      COMPRUEBA SI EL NUMERO I ESTA EN LA LISTA IG. SI NO ESTA
0130 C      DEVUELVE EL VALOR 0
0131 C
0132      DIMENSION IG(NG)
0133      DO 1 IN=1,NG
0134      IF(I.EQ.IG(IN))RETURN
0135      1 CONTINUE
0136      IN=0
0137      RETURN
0138      END
```

\*\* NO ERRORS\*\* PROGRAM = 00039 COMMON = 00000

PAGE 0001 FTN4 COMPILER: HP24177 (SEPT. 1974)

```
0139      INTEGER FUNCTION INDEX(I,J,NT)
0140 C
0141 C      DEVUELVE LA POSICION DEL ELEMENTO TEORICO A(I,J)
0142 C
0143      IDIF=J-I
0144      INDEX=(I-1)*NT+1+IDIF
0145      IF(IDIF.LE.NT-1)RETURN
0146      IDIF=MOD(IDIF,NT-1)
0147      IF(IDIF.EQ.0)IDIF=NT-1
0148      INDEX=(I-1)*NT+IDIF+1
0149      RETURN
0150      END
```

\*\* NO ERRORS\*\* PROGRAM = 00065 COMMON = 00000

```

0151      SUBROUTINE ELIM(A,NEQU,NT,IG,NG,B)
0152 C
0153 C      CONDENSACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE MATRIZ SIMETRICA
0154 C      Y EN BANDA
0155 C      A=SEMIBANDA DE LA MATRIZ A CONDENSAR
0156 C      NEQU=NUMERO DE ECUACIONES DEL SISTEMA
0157 C      NT=SEMIANCHO DE BANDA DEL SISTEMA
0158 C      IG=LISTA DE VARIABLES A CONSERVAR
0159 C      NG=NUMERO DE VARIABLES A CONSERVAR
0160 C      B=ZONA TRIANGULADA SUPERIOR DE LA MATRIZ CONDENSADA
0161 C
0162      DIMENSION A(1),IG(NG),B(1)
0163 C
0164 C      DEVUELVE LA POSICION DEL ELEMENTO TEORICO B(I,J)
0165 C
0166      IND(I,J)=(I-1)*NG-(I-1)*(I-2)/2+J-I+1
0167      IT=NG*(NG+1)/2
0168 C
0169 C      PUESTA A CERO DE LA MATRIZ
0170 C
0171      DO 1 I=1,IT
0172 1      B(I)=0
0173      IFILA=0
0174      ID=0
0175      NT1=NT-1
0176      DO 2 I=1,NEQU
0177      I1=I+1
0178      IDIAG=INDEX(I,I,NT)
0179      JFIN=I+NT1
0180      IF(JFIN.GT.NEQU)JFIN=NEQU
0181      IF(IN(I,IG,NG).EQ.0)GO TO 10
0182 C
0183 C      TRASPASO DE COEFICIENTES DE LA MATRIZ A A LA MATRIZ B
0184 C
0185      IFILA=IFILA+1
0186      DO 3 L=IFILA,NG
0187      ID=ID+1
0188      J=IG(L)
0189      IF(J.GT.JFIN)GO TO 3
0190      J3=J-I
0191      B(ID)=A(IDIAG+J3)
0192      A(IDIAG+J3)=0
0193 3      CONTINUE
0194      GO TO 2
0195 10      IF(I.EQ.NEQU)GO TO 20
0196 C
0197 C      ACTUACION DE LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A GRADOS DE
0198 C      LIBERTAD A ELIMINAR SOBRE LAS ECUACIONES POSTERIORES
0199 C
0200      DO 11 J=I1,JFIN
0201      J3=J-I
0202      N1=INDEX(J,J,NT)
0203      AUX=A(IDIAG+J3)/A(IDIAG)
0204      IF(AUX.EQ.0)GO TO 11
0205      DO 12 K=J3,NT1
0206      A(N1)=A(N1)-A(IDIAG+K)*AUX

```

```

0207      12 N1=N1+1
0208      11 CONTINUE
0209      20 IF(IFILA.EQ.0)GO TO 2
0210      C
0211      C      ACTUACION DE LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A GRADOS DE
0212      C      LIBERTAD A ELIMINAR SOBRE LAS ECUACIONES ANTERIORES
0213      C
0214      DO 21 L=1,IFILA
0215      J=IG(L)
0216      N1=INDEX(J,I,NT)
0217      AUX=A(N1)/A(IDIAG)
0218      IF(AUX.EQ.0)GO TO 21
0219      C
0220      C      MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN B
0221      C
0222      DO 22 L1=L,NG
0223      J1=IG(L1)
0224      IF(J1.GT.JFIN)GO TO 22
0225      K1=IND(L,L1)
0226      K2=INDEX(J1,I,NT)
0227      IF(J1.GT.I)K2=INDEX(I,J1,NT)
0228      R(K1)=B(K1)-A(K2)*AUX
0229      22 CONTINUE
0230      C
0231      C      MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN A
0232      C
0233      DO 23 K=I,JFIN
0234      K1=INDEX(J,K,NT)
0235      K7=JDIAG+K-I
0236      A(K1)=A(K1)-A(IDIAG+K-I)*AUX
0237      IF(IN(K,IG,NG).GT.0)A(K1)=0
0238      23 CONTINUE
0239      21 CONTINUE
0240      2 CONTINUE
0241      RETURN
0242      END

```

\*\* NO ERRORS\*\*      PROGRAM = 00505      COMMON = 00000

0243      ENDS



**APENDICE 2. LISTADOS DE**  
SUBROUTINE DELIM  
SUBROUTINE TRANS  
INTEGER FUNCTION IN  
INTEGER FUNCTION IDIST

Correspondiente a la versión del algoritmo que toma de disco la matriz de rigidez a condensar.

PAGE 0001                   FTN4 COMPILER: HP24177 (SEPT. 1974)

```
0132           INTEGER FUNCTION IN(I,IG,NG)
0133           C
0134           C     COMPRUEBA SI EL NUMERO I ESTA EN LA LISTA IG. SI NO ESTA
0135           C     DEVUELVE EL VALOR 0
0136           C
0137           DIMENSION IG(NG)
0138           DO 1 IN=1,NG
0139           IF(I.EQ.IG(IN))RETURN
0140           1 CONTINUE
0141           IN=0
0142           RETURN
0143           END
```

★★ NO ERRORS★★           PROGRAM = 00039           COMMON = 00000

PAGE 0001                   FTN4 COMPILER: HP24177 (SEPT. 1974)

```
0144           INTEGER FUNCTION IDIST(I,J,NT)
0145           C
0146           C     DEVUELVE LA DISTANCIA AL ELEMENTO A(I,I) DEL ELEMENTO A(I,J)
0147           C
0148           IDIST=J-I
0149           IF(IDIST.LE.NT-1)RETURN
0150           IDIST=MOD(IDIST,NT-1)
0151           IF(IDIST.EQ.0)IDIST=NT-1
0152           RETURN
0153           END
```

★★ NO ERRORS★★           PROGRAM = 00048           COMMON = 00000

```

0154      SUBROUTINE TRANS(NF,KEY,NI,NE,NT,NX,X)
0155 C
0156 C      TRASFERENCIA DE DATOS ENTRE LA MATRIZ X DE LA MEMORIA CENTRAL
0157 C      Y EL ARCHIVO NF DEL DISCO
0158 C
0159      DIMENSION NF(144),BUFL(64),BUF1(64),X(1),IB1(128),IBL(128)
0160      EQUIVALENCE (IB1(1),BUF1(1)),(IBL(1),BUFL(1))
0161      IX=NX
0162      NREG=(NI-1)/64*NT+MOD(NI-1,64)*NT/64+1
0163      NI=MOD(NI-1,64)*NT
0164      NG=MOD(NI,64)+1
0165      NPAL=NT*NE
0166      IF(KEY)5,4,5
0167      4 NUM=0
0168      INI=NG
0169      44 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
0170      DO 54 I=INI,64
0171      NUM=NUM+1
0172      X(IX)=BUFL(I)
0173      IX=IX+1
0174      IF(NUM.GE.NPAL)GO TO 6
0175      54 CONTINUE
0176      INI=1
0177      NREG=NREG+1
0178      GO TO 44
0179      5 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
0180      INI=NG
0181      NUM=0
0182      63 DO 64 I=INI,64
0183      BUFL(I)=X(IX)
0184      NUM=NUM+1
0185      IX=IX+1
0186      IF(NUM.GE.NPAL) GO TO 66
0187      64 CONTINUE
0188      INI=1
0189      CALL WRITF(NF,IERR,IBL,128,NREG)
0190      NREG=NREG+1
0191      GO TO 63
0192      66 CALL READF(NF,IERR,IB1,128,K,NREG)
0193      DO 67 J=1,I
0194      BUF1(J)=BUFL(J)
0195      67 CONTINUE
0196      CALL WRITF(NF,IERR,IB1,128,NREG)
0197      6 CONTINUE
0198      RETURN
0199      END

```

\*\* NO ERRORS\*\*      PROGRAM = 00503      COMMON = 00000

```

0200      SUBROUTINE DELIM(A,NECU,NT,IG,NG,LONGA,NF1)
0201      C
0202      C      CONDENSACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE MATRIZ SIMETRICA Y
0203      C      EN BANDA
0204      C      A=AREA DE TRABAJO
0205      C      LONGA=DIMENSION DE A
0206      C      NECU=NUMERO DE ECUACIONES
0207      C      NT=SEMIANCHO DE BANDA DEL SISTEMA
0208      C      IG=LISTA DE VARIABLES A CONSERVAR
0209      C      NG=NUMERO DE VARIABLES A CONSERVAR
0210      C      NF1=ARCHIVO DEL DISCO QUE CONTIENE LA MATRIZ A CONDENSAR
0211      C      DEVUELVE EL RESULTADO EN LA MATRIZ A
0212      C
0213      C      DIMENSION A(LONGA),NF1(144),IG(NG)
0214      C
0215      C      DEVUELVE LA POSICION DEL ELEMENTO TEORICO B(I,J)
0216      C
0217      C      IND(I,J)=(I-1)*NG-(I-1)*(I-2)/2+J-I+1
0218      C
0219      C      PRIMERA PARTE DEL ALGORITMO. LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A
0220      C      GRADOS DE LIBERTAD A ELIMINAR MODIFICAN A LAS POSTERIORES
0221      C
0222      C      NT1=NT-1
0223      C
0224      C      DIVISION DE LA MEMORIA EN DOS BLOQUES
0225      C
0226      C      N1=LONGA/NT
0227      C      N2=N1/2
0228      C      N1=N2
0229      C      IFIN1=N1*NT
0230      C      INI2=IFIN1+1
0231      C      DO 61 NI2=1,NECU,N2
0232      C      IF(NI2.GT.1)GO TO 62
0233      C
0234      C      PASO 1. CONSIDERACION DE 2*N2 PRIMERAS ECUACIONES DEL SISTEMA
0235      C
0236      C      NE1=2*N2
0237      C      IF(NE1.GT.NECU)NE1=NECU
0238      C      CALL TRANS(NF1,0,1,NE1,NT,1,A)
0239      C      NI2=N2+1
0240      C      NI1=1
0241      C      GO TO 70
0242      C
0243      C      PREPARACION DEL SEGUNDO BLOQUE
0244      C
0245      C      62 NE2=N2
0246      C      IF((NI2+N2-1).GT.NECU)NE2=NECU-NI2+1
0247      C      CALL TRANS(NF1,0,NI2,NE2,NT,INI2,A)
0248      C      DO 63 NI1=NI2-N2,NI2-NT-N2,-N2
0249      C
0250      C      PREPARACION DEL PRIMER BLOQUE, QUE MODIFICARA AL ACTUAL
0251      C      SEGUNDO BLOQUE
0252      C
0253      C      IF(NI1.LT.1)GO TO 65
0254      C      CALL TRANS(NF1,0,NI1,N2,NT,1,A)
0255      C

```



```

0256 C   LAS ECUACIONES DEL PRIMER BLOQUE MODIFICAN LAS DEL SEGUNDO
0257 C
0258     NE1=N2
0259     DO 52 I=1,NE1
0260     IF(IN(I+NI1-1,IG,NG).NE.0)GO TO 52
0261     IDIAG=(I-1)*NT+1
0262     IF(A(IDIAG).GT.1.E+19) GO TO 52
0263     IDIF=NI2-NI1-I+1
0264     IF(IDIF.GT.NT1) GO TO 52
0265     DO 53 I1=IDIF,NT1
0266     I2=I1+IDIAG
0267     IF(A(I2).EQ.0) GO TO 53
0268     TER=A(I2)/A(IDIAG)
0269     I3=INI2+I1-IDIF-NT+1
0270     I20=I2
0271     IF(I1.GE.(IDIF+NE2)) I20=IDIAG+IDIF+NE2-1
0272     DO 54 I4=IDIAG+IDIF,I20
0273     I3=I3+NT-1
0274     A(I3)=A(I3)-A(I4)*TER
0275     54 CONTINUE
0276     53 CONTINUE
0277     52 CONTINUE
0278     63 CONTINUE
0279 C
0280 C   DESPLAZA LAS ECUACIONES DEL SEGUNDO BLOQUE AL PRIMERO
0281 C
0282     65 DO 66 I=1,NE2*NT
0283     66 A(I)=A(I+IFIN1)
0284     NE1=NE2
0285 C
0286 C   LAS ECUACIONES DEL PRIMER BLOQUE SE MODIFICAN A SI MISMAS
0287 C
0288     NI1=NI2
0289     70 DO 2 I=1,NE1-1
0290     IF(IN(I+NI1-1,IG,NG).NE.0)GO TO 2
0291     IDIAG=(I-1)*NT+1
0292     IF(A(IDIAG).GT.1.E+19) GO TO 2
0293     DO 3 I1=1,NT1
0294     I2=I1+IDIAG
0295     IF(A(I2).EQ.0) GO TO 3
0296     TER=A(I2)/A(IDIAG)
0297     I3=I2
0298     I20=I2
0299     IF(I1.GT.(NE1-I)) I20=IDIAG+NE1-I
0300     DO 4 I4=IDIAG+1,I20
0301     I3=I3+NT-1
0302     A(I3)=A(I3)-A(I4)*TER
0303     4 CONTINUE
0304     3 CONTINUE
0305     2 CONTINUE
0306 C
0307 C   DEVUELVE AL DISCO LAS ECUACIONES QUE HAN ACABADO LA PRIMERA PARTE
0308 C
0309     CALL TRANS(NF1,1,NI1,NE1,NT,1,A)
0310     61 CONTINUE
0311 C

```

```

0312 C      SEGUNDA PARTE DEL ALGORITMO. LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES
0313 C      A GRADOS DE LIBERTAD A ELIMINAR, MODIFICAN LAS ANTERIORES A
0314 C      CONSERVAR
0315 C      DIVISION DE LA MEMORIA EN TRES BLOQUES
0316 C
0317 C      IFIN1=NG*(NG+1)/2
0318 C      INI2=IFIN1+1
0319 C      IFIN2=IFIN1+NG*NT
0320 C      INI3=IFIN2+1
0321 C      NE3=(LONGA-IFIN2)/NT
0322 C
0323 C      PUESTA A CERO DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ SOLUCION
0324 C
0325 C      DO 101 I=1,IFIN1
0326 C 101 A(I)=0
0327 C
0328 C      SE TRAEN A MEMORIA LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A GRADOS DE
0329 C      LIBERTAD A CONSERVAR(SEGUNDO BLOQUE)
0330 C
0331 C      DO 102 L=1,NG
0332 C      I=IG(L)
0333 C      CALL TRANS(NF1,0,I,1,NT,INI2+(L-1)*NT,A)
0334 C 102 CONTINUE
0335 C
0336 C      TRASPASO DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ B(PRIMER BLOQUE)
0337 C
0338 C      DO 103 L=1,NG
0339 C      I=IG(L)
0340 C      JFIN=I+NT1
0341 C      IF(JFIN.GT.NECU)JFIN=NECU
0342 C      IDIAG=(L-1)*NT+INI2
0343 C      DO 104 L1=L,NG
0344 C      J=IG(L1)
0345 C      IF(J.GT.JFIN)GO TO 104
0346 C      J3=J-I
0347 C      N1=IND(L,L1)
0348 C      A(N1)=A(IDIAG+J3)
0349 C      A(IDIAG+J3)=0
0350 C 104 CONTINUE
0351 C 103 CONTINUE
0352 C      DO 106 IL=IG(1)+1,NECU,NE3
0353 C      IL1=IL+NE3-1
0354 C      IF(IL1.GT.NECU)IL1=NECU
0355 C
0356 C      TRAE A MEMORIA LAS ECUACIONES QUE CABEN EN EL TERCER BLOQUE
0357 C
0358 C      CALL TRANS(NF1,0,IL,IL1-IL+1,NT,INI3,A)
0359 C      DO 107 I=IL,IL1
0360 C      IF(IN(I,IG,NG).NE.0)GO TO 107
0361 C      JFIN=I+NT1
0362 C      IF(JFIN.GT.NECU)JFIN=NECU
0363 C      IDIAG=(I-IL)*NT+INI3
0364 C      DO 108 IFILA=NG,1,-1
0365 C      IF(I.GT.IG(IFILA))GO TO 109
0366 C 108 CONTINUE
0367 C 109 DO 121 L=1,IFILA

```

```

0368      J=IG(L)
0369      IDIAG2=(L-1)*NT+INI2
0370      N1=IDIAG2+IDIST(J,I,NT)
0371      AUX=A(N1)/A(IDIAG)
0372      IF(AUX.EQ.0)GO TO 121
0373      C
0374      C      MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN B(PRIMER BLOQUE)
0375      C
0376      DO 122 L1=L,NG
0377      K=IG(L1)
0378      IF(K.GT.JFIN)GO TO 122
0379      N1=IND(L,L1)
0380      IDIAG3=(L1-1)*NT+INI2
0381      N2=IDIAG3+IDIST(K,I,NT)
0382      IF(K.GT.I)N2=IDIAG+K-I
0383      A(N1)=A(N1)-A(N2)*AUX
0384      122 CONTINUE
0385      C
0386      C      MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN A(SEGUNDO BLOQUE)
0387      C
0388      DO 123 K=I,JFIN
0389      J3=K-I
0390      N1=IDIAG2+IDIST(J,K,NT)
0391      N2=IDIAG+J3
0392      I7=IDIST(J,K,NT)
0393      A(N1)=A(N1)-A(N2)*AUX
0394      IF(IN(K,IG,NG).NE.0)A(N1)=0
0395      123 CONTINUE
0396      121 CONTINUE
0397      107 CONTINUE
0398      106 CONTINUE
0399      RETURN
0400      END

```

\*\* NO ERRORS\*\*      PROGRAM = 01102      COMMON = 00000

0401      ENDS



**Feria Internacional de la Construcción – “Interbuild 81”**  
**29 Noviembre – 5 Diciembre 1981**  
**Centro Nacional de Exposiciones – Birmingham**

Feria Internacional de carácter bianual, que celebró su primera edición en 1895 en Londres.

Para la edición 1981 ya han reservado espacio más de 1.200 expositores de 30 países diferentes que expondrán sus productos y materiales en seis amplios pabellones. Por primera vez, se incorporan los sectores CALEFACCION – COCINAS y MAQUINARIA PARA TRABAJAR LA MADERA.

### **PRODUCTOS**

En un lugar, al mismo tiempo y bajo un solo techo, se podrán ver entre otros los productos que se detallan a continuación:

Aire acondicionado/Energía solar y otras/Puertas y ventanas de aluminio/Ferretería arquitectónica-Baños-Duchas-Accesorios/Ladrillos y azulejos/Ferretería para constructores/Productos de cerámica/Revestimientos/Hormigón/Equipos para delineantes/Elementos de fijación y cierre/Herramientas manuales y eléctricas/Aislamientos/Productos de plástico y de drenaje/Productos de bronce para fontaneros/Sistemas de techumbre/Materiales sanitarios/Materiales y elementos estructurales/Equipos para medición y peritaje/Productos a base de madera/Viviendas de armazón de madera.

### **VIAJE COLECTIVO, ORGANIZADO POR LA CAMARA DE COMERCIO BRITANICA EN ESPAÑA**

Salidas desde MADRID – BARCELONA – BILBAO.

### **PROGRAMA (provisional)**

- 28 Noviembre (sábado): Salida con destino Londres. Alojamiento.
- 29 Noviembre (domingo): Visita a la Feria.
- 30 Noviembre (lunes): Visita a la Feria.
- 1 Diciembre (martes): Visita a la Feria/Visita técnica/Día libre (Opcional).
- 2 Diciembre (miércoles): Regreso a punto de partida.

### **INFORMACION**

La Cámara de Comercio Británica, representante en España de los Organizadores para esta Exposición, puede facilitar a quien lo solicite información sobre la Feria para posibles expositores (costo, espacio, etc.) y sobre el viaje para quien esté interesado en visitarla. Dirijan sus consultas a:

### **CAMARA DE COMERCIO BRITANICA EN ESPAÑA**

Marqués de Valdeiglesias, 3 – Madrid (4) Tx. 45522  
Pº de Gracia, 11, A – Barcelona (7) Tx. 51681  
Alameda de Mazarredo, 5 – Bilbao (1) Tx. 31276

## Constitución de la Asociación Europea de Fabricantes de Arido Ligerero (E.L.A.P.A.)

La creciente importancia de los áridos ligeros en la construcción y en otros campos, ha movido a los principales fabricantes europeos de dicho Material a agruparse para formar la Asociación Europea de Fabricantes de Arido Ligeros (E.L.A.P.A.). Dicha Asociación fue constituida formalmente en una reunión de fabricantes en Zurich a principios de este año.

Un pequeño grupo de fabricantes se reunieron en Munich en 1979 y acordaron que, dado el auge adquirido por los áridos ligeros, resultaba de imperiosa necesidad su representación conjunta ante los organismos nacionales y supranacionales.

En 1980 se celebró una segunda reunión preparatoria en Frankfurt, y en la reunión de Zurich de Enero de 1981, 19 compañías productoras de áridos ligeros representando a 7 países europeos, tomaron la decisión de constituir E.L.A.P.A. Los 7 países representados fueron:

ALEMANIA R.F.  
BELGICA  
ESPAÑA  
FINLANDIA  
FRANCIA  
GRAN BRETAÑA  
ITALIA

En la misma reunión quedó elegido el primer consejo directivo de la asociación con la siguiente composición:

H.J. Rohrbach (Alemania).—Presidente  
J. Alonso (España)  
R. Oesterberg (Finlandia)  
A. de Orleans-Borbon (Italia)  
D.B. Horler (Gran Bretaña).—Secretario

Como fines funcionales de la nueva asociación quedaron establecidos los siguientes:

- 1.—Promover los intereses de los fabricantes de áridos ligeros.
- 2.—Conseguir adecuada representación en las comisiones técnicas y de todo tipo a través de Europa.
- 3.—Cooperar con organizaciones internacionales del mismo ámbito.

Asimismo quedó constituido un Comité Técnico bajo la presidencia del Dr. Ing. J. Spitzner (Alemania).

Cualquier información adicional puede obtenerse a través del secretario de la Asociación, D.B. Horler, Lytag Ltd., Hamilton House, 111, Marlowes, Hemel Hempstead, Hertfordshire, Gran Bretaña, o del representante español del Consejo Directivo, J. Alonso, Aridos Ligeros, S.A., Almagro, 3. Madrid-4.

## Who's Who in Technology

“WHO'S WHO IN TECHNOLOGY” (QUIEN ES QUIEN EN TECNOLOGIA) es el título de una publicación en inglés de la International Red Series Verlag GmbH de Munich. En dos tomos cuidadosamente editados aparece la reseña biográfica de casi 10.000 destacados científicos de Austria, Alemania y Suiza, relacionados con el extenso campo de la tecnología. En cada reseña biográfica se facilitan datos personales: nivel cultural, carreras, méritos y otros interesantes detalles de estos importantes técnicos. Seguidamente se facilitan agrupados por especialidades los nombres de estas personalidades.

Por último en el apéndice se indican las direcciones de Ministerios, Oficinas Públicas, Cámaras de Industria y Comercio, Universidades, Centros de Enseñanza, Museos, Librerías, Archivos, Instituciones y Centros de Investigación, así como de Asociaciones y Organizaciones relacionadas con la técnica y agrupados según los países ya citados.

Esta enciclopedia de famosas personalidades en el campo de la tecnología da una respuesta a cuestiones tales como: quiénes hacen investigación tecnológica, qué técnicas y procedimientos se están aplicando y por quién.

WHO'S WHO IN TECHNOLOGY es una publicación de “Who's Who the international red series”. P.O.B. 1150 D-8031 Woerthsee near Munich. West Germany.

### **Hormigón Pretensado, Realizaciones Españolas. Tomo III**

Con motivo del VIII Congreso Internacional de la F.I.P. últimamente celebrado en Londres, la Asociación Técnica Española del Pretensado ha publicado un libro titulado: “Hormigón Pretensado, Realizaciones Españolas”, tomo III, en el que se describen las principales obras pretensadas construidas en nuestro país durante los últimos cuatro años.

Consta de más de 300 páginas, con numerosas fotografías, planos y láminas y está editado en papel couché, encuadernado en tela y con sobrecubierta plastificada en color. Su precio es de 2.000 pesetas cada ejemplar (para el extranjero, 30 dólares).

Para su descripción, las distintas obras aparecen agrupadas en los siguientes apartados: Puentes, Edificación, Obras Hidráulicas y Marítimas, Obras especiales.

Los interesados en adquirir este libro, que es continuación de los tomos I y II publicados con ocasión de los anteriores Congresos de la F.I.P., celebrados en Praga, en 1970, y en Nueva York, en 1974, respectivamente, pueden cursar sus pedidos a la Secretaria de la A.T.E.P. o al Instituto Eduardo Torroja, aptdo. 19002, Madrid-33.



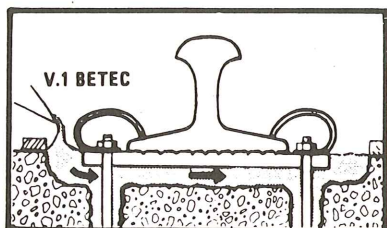
# Beton Technik Iberica, S.A.

DOCTOR FLEMING, 35 - 2º - F - MADRID - 16 - TELS. 250 10 00/259 01 07/250 82 16

## BETEC V·I

### EL MORTERO SIN RETRACCION DIFERENTE SIN AGREGADOS METALICOS SIN CLORUROS

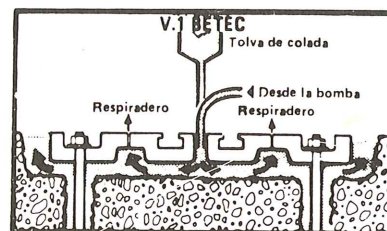
- ANCLAJES
- BANCADAS
- FISURAS
- RAILLES
- UNION DE HORMIGONES
- Densidad = 1,8 Kgr./litro
- No se oxida
- No hay que protegerlo
- Muy fluído ( 22 cms. Cono de Abrams)
- IMPERMEABLE



Ensayos Realizados en el Instituto  
Eduardo Torroja y Nordrhein - Westfalen

Compresión  
Kp/cm<sup>2</sup>  
Flexión  
Kgr./cm<sup>2</sup>

24 Hs.	2 días	7 días	28 días
528	687	795	938
79	92	120	125



## FERRODUR - SUELOS INDUSTRIALES

### FERRODUR - MONOLITICO

**BETEC**

Suelos monolíticos de pavimento continuo Ferrodur

### FERRODUR - AUTOADHERENTE

**BETEC**

Mezcla acabada de hierro Ferrodur con adherente incorporado, para la reparación de superficies sometidas a grandes esfuerzos.

### FERRODUR - ARMADO «A»

**BETEC**

Suelos Ferrodur y mortero de reparación con adherente incorporado para cargas intermedias.



**asociación técnica  
española del pretensado**