

Matriz de rigidez para estructuras con barras de sección o rigidez variable

Stiffness matrix for structures with bars of variable section or rigidity

Ángel Ibáñez Ceba ^{*,a}

^a Arquitecto

RESUMEN

El cálculo matricial por el Método de la Matriz de Rigidez de estructuras compuestas por barras rectas se realiza normalmente considerando las barras de sección e inercia constantes y esta hipótesis se considera suficientemente segura en todos los casos.

Sin embargo, en la práctica, muchos sistemas estructurales están formados por barras de sección o inercia variable, como es el caso de las barras acarteladas, las barras fisuradas de hormigón armado, las barras de acero con uniones semirrígidas o las barras mixtas de hormigón y acero.

En este estudio se plantea la Matriz de Rigidez de una barra recta de sección o inercia variable cuyos coeficientes de rigidez son función de las leyes de variación del área de su sección, de su Módulo de Torsión y de los Momentos de Inercia referidos a los ejes normales a su directriz.

Este planteamiento no incrementa el número de nudos de la estructura ni el de incógnitas de la ecuación matricial y permite que, estableciendo criterios suficientemente aproximados para el cálculo de sus coeficientes de rigidez, determinar un comportamiento más real de sus elementos estructurales.

PALABRAS CLAVE: Matriz de Rigidez, sección variable, inercia variable, hormigón fisurado, conexiones semirrígidas, vigas mixtas.

©2025 Hormigón y Acero, la revista de la Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Publicado por Cinter Divulgación Técnica S.L. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0)

ABSTRACT

The matrix calculation by the Rigidity Matrix Method of structures composed of straight bars is normally carried out considering the bars of constant section and inertia and this hypothesis is considered sufficiently safe in all cases.

However, in practice, many structural systems are made up of bars of variable section or inertia, such as haunched bars, cracked reinforced concrete bars, steel bars with semirigid joints or composite concrete and steel bars.

In this study, the Stiffness Matrix of a straight bar of variable section or inertia is proposed, whose stiffness coefficients are a function of the laws of variation of the area of its section, its Torsion Module and the Moments of Inertia referred to the axes normal to its guideline. This approach does not increase the number of nodes in the structure or the number of unknowns in the matrix equation and allows, by establishing sufficiently approximate criteria for the calculation of its rigidity coefficients, to determine a more realistic behavior of its structural elements.

KEYWORDS: Stiffness Matrix, variable section, variable inertia, cracked concrete, semirigid connections, composite beams.

©2025 Hormigón y Acero, the journal of the Spanish Association of Structural Engineering (ACHE). Published by Cinter Divulgación Técnica S.L. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0) License

* Persona de contacto / Corresponding author:
Correo-e / e-mail: aiceba2@gmail.com (Ángel Ibáñez Ceba)

Cómo citar este artículo: Ibáñez Ceba, A. (2025) Matriz de rigidez para estructuras con barras de sección o rigidez variable, *Hormigón y Acero*, 76(306):119-134.
<https://doi.org/10.33586/hya.2024.3952>

1. INTRODUCCIÓN

En los modelos estructurales comúnmente utilizados para proyectar estructuras de edificación o de obra civil es habitual el empleo de barras de sección no constante, por ejem-

plo, las barras acarteladas o aquellas otras que disponen de refuerzos en alguna zona de la barra que modifican su sección.

También es habitual el empleo de barras compuestas por varios materiales, que, aun disponiendo de una sección constante, su inercia o el área de su sección no es constante, por

ejemplo, las barras de hormigón armado en estado fisurado o las vigas mixtas de hormigón y perfiles metálicos.

Un análisis más detallado de cómo se comportan estos elementos precisa de un modelo de cálculo que tenga en cuenta la variación de las constantes mecánicas de la barra que determinan su rigidez, es decir las leyes de variación del área de su sección, de su Módulo de Torsión y de los Momentos de Inercia referidos a los ejes normales a su directriz.

Cuando se plantea el Método de la Rigidez para calcular una estructura de estas características es preciso determinar la Matriz de Rigidez de sus barras con los valores de sus constantes mecánicas que son variables a lo largo de su directriz.

En alguna de estas aplicaciones es posible que los Coeficientes de Rigidez dependan del resultado, en cuyo caso el sistema matricial deja de ser lineal y precisa de iteraciones, como es el caso de las barras de hormigón fisuradas o el de las uniones semirrígidas de perfiles de acero.

Lo que se plantea en este estudio es un método para calcular los coeficientes de la Matriz de Rigidez de la barra siempre que sean conocidas las leyes de variación de sus constantes mecánicas a lo largo de la misma, esto es: área de la sección, Módulo de Torsión y Momentos de Inercia referidos a los ejes normales a su directriz.

Por tanto, la determinación de estas leyes de variación es lo que permite un cálculo más o menos ajustado a la realidad en un modelo de cálculo.

Para calcular estas leyes de variación para un material determinado, simple o compuesto, se han venido empleado técnicas diversas entre las que pueden señalarse las siguientes:

- *Por asimilación a barras de sección constante mediante la introducción de nudos intermedios.*
- *Mediante Métodos basados en el comportamiento no lineal de los materiales.*
- *Mediante métodos de cálculo de la rigidez de una barra por integración de sus constantes mecánicas a lo largo de la misma.*

En este trabajo se utiliza un método por integración para calcular los coeficientes de la Matriz de Rigidez de una barra de sección y/o rigidez variable.

El interés principal de este estudio se centra en sus posibles aplicaciones para sistemas estructurales donde la rigidez de sus elementos puede influir en su comportamiento estructural.

2. COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA BARRAS RECTAS DE SECCIÓN VARIABLE

2.1. Planteamiento de la Matriz de rigidez

Para plantear la ecuación de rigidez global de una estructura se parte de la hipótesis de que los movimientos de sus nudos son inicialmente nulos, y que la sustentación inicial de las barras que la componen equivale a un empotramiento en sus extremos.

La ecuación de rigidez de la estructura sólo admite cargas que estén aplicadas en los nudos, por lo cual todas las accio-

nes que actúan sobre las barras deben ser sustituidas en cada barra por el vector A_b de acciones equivalentes de extremo de la barra.

Coeficiente de rigidez se define como la acción que causaría una deformación unitaria en los extremos de la barra.

Cuando estos coeficientes son referidos a los extremos de la barra empotrada, el conjunto de todos ellos constituye la matriz de rigidez R_b de extremos de la barra empotrada, de tamaño 12×12 , que interrelaciona el vector A_b de acciones equivalentes de extremo con el vector D_b de movimientos de extremo de la barra mediante la ecuación de rigidez de la barra:

$$R_b D_b = A_b \quad (1)$$

Para determinar los diversos coeficientes de rigidez que componen R_b , que es el objeto del presente Apartado, se procederá a aplicar movimientos de valor unitario a los extremos de la barra, resultando así una serie de reacciones que son los coeficientes de rigidez.

Las ecuaciones utilizadas en este apartado para el estudio de la barra de sección variable se deducen directamente, indirectamente o por similitud de las formuladas por J. Lahuerta, [1], [2], [3],

2.2. Ejes de referencia de la barra y numeración de movimientos.

Para expresar los coeficientes de rigidez, se numeran los movimientos de traslación y rotación según los ejes de la barra de la siguiente manera:

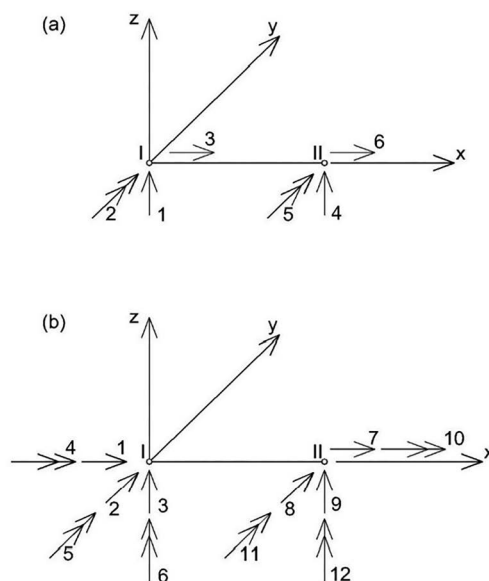


Figura 1. Ejes y movimientos de la barra: a) en el plano, b) en el espacio.

2.3. Sección e inercias variables a lo largo de la barra.

Las constantes elásticas de una barra recta de sección variable, de longitud L , se definen a partir de los valores del área de

su sección a lo largo de la barra y de los momentos de inercia y módulo de torsión, también a lo largo de la barra.

Para ello se definen la variación de estos valores:

$$\text{Área de la sección variable} \quad A(x) = A_{0\zeta_1}(x) \quad (2)$$

$$\text{Módulo de Torsión variable} \quad I_t(x) = I_{t0\zeta_2}(x) \quad (3)$$

$$\text{Momento de Inercia variable en el eje y} \quad I_y(x) = I_{y0\zeta_3}(x) \quad (4)$$

$$\text{Momento de Inercia variable en el eje z} \quad I_z(x) = I_{z0\zeta_4}(x) \quad (5)$$

Siendo A_0 , I_{t0} , I_{y0} , I_{z0} los valores de referencia para el Área de la sección, el Módulo de Torsión y los Momentos de Inercia en los ejes y o z respectivamente, (se definen de forma similar al establecido en [1] tabla 2.05-6).

2.4. Rigidez longitudinal de una barra de sección variable.

Los coeficientes de rigidez asociados a una deformación longitudinal de una barra recta con el área de su sección variable $A(x) = A_{0\zeta_1}(x)$, son las acciones producidas en sus extremos por un desplazamiento longitudinal unitario aplicado en uno de ellos (deducido a partir de [2] (Fórm.22.1)).

$$D = \int_0^L \frac{N}{EA(x)} dx = \int_0^L \frac{N}{EA_{0\zeta_1}(x)} dx = 1 \quad (6)$$

Para producir este desplazamiento se precisa aplicar en el extremo desplazado una fuerza N , y en el extremo opuesto, una fuerza $N' = -N$, de valor:

$$N = \frac{A_0 E}{\int_0^L \frac{dx}{\zeta_1(x)}} = \alpha \frac{A_0 E}{L}, \text{ siendo: } \alpha = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{\zeta_1(x)}} \quad (7)$$

Estos coeficientes de rigidez forman parte de la expresión general de la Matriz de Rigidez de la Barra en el espacio que se establece más adelante (ver Figura 1.b), y se corresponde con los movimientos unitarios números 1 y 7.

Por tanto, los coeficientes de rigidez debidos al desplazamiento 1 valen:

$$R_{1,1} = \alpha \frac{A_0 E}{L} \quad R_{7,1} = -\alpha \frac{A_0 E}{L} \quad (8)$$

Y los coeficientes de rigidez debidos al desplazamiento 7 valen:

$$R_{1,7} = -\alpha \frac{A_0 E}{L} \quad R_{7,7} = \alpha \frac{A_0 E}{L} \quad (9)$$

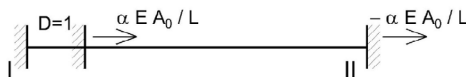


Figura 2. Coeficientes de rigidez por desplazamiento longitudinal unitario en un extremo.

2.5. Rigidez a torsión en una barra de sección variable.

Los coeficientes de rigidez asociados a una deformación angular a lo largo de una barra recta con Módulo de Torsión variable (Ec.3), son las acciones producidas en sus extremos por un desplazamiento angular unitario aplicado en uno de ellos.

$$D = \int_0^L \frac{T}{G I_t(x)} dx = \int_0^L \frac{T}{G I_{t0\zeta_2}(x)} dx = 1 \quad (10)$$

Para producir este desplazamiento angular se precisa aplicar en el extremo girado un momento torsor T , y en el extremo opuesto un Momento Torsor $T' = -T$, de valor:

$$T = \frac{I_{t0} G}{\int_0^L \frac{dx}{\zeta_2(x)}} = \beta \frac{I_{t0} G}{L}, \text{ siendo: } \beta = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{\zeta_2(x)}} \quad (11)$$

Estos coeficientes de rigidez también forman parte de la expresión general de la Matriz de Rigidez de la Barra en el espacio (Figura 1.b), y se corresponde con los giros unitarios números 4 y 10.

Los coeficientes de rigidez debidos a tales giros 4 y 10 valen respectivamente:

$$R_{4,4} = \beta \frac{I_{t0} G}{L} \quad R_{10,4} = -\beta \frac{I_{t0} G}{L} \quad (12)$$

$$R_{4,10} = -\beta \frac{I_{t0} G}{L} \quad R_{10,10} = \beta \frac{I_{t0} G}{L} \quad (13)$$

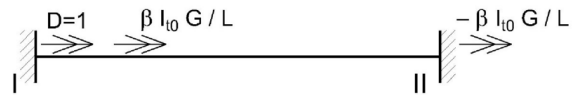


Figura 3. Coeficientes de rigidez por giro longitudinal unitario en un extremo.

2.6. Deformación de una barra de sección variable.

Para poder determinar los coeficientes de rigidez de la barra ante un giro o traslación en uno de sus extremos procedemos a estudiar, en primer lugar, la deformación de la barra.

En una barra isostática simplemente apoyada de sección variable los ángulos girados en las secciones extremas respecto del eje y, bajo el efecto de las cargas que actúan en la barra son: [1] 2.05-7

$$\theta'_y = \frac{L}{A I_y} G'_y, \quad \text{siendo: } G'_y = \int_0^L \frac{M_{is,y}(x)(L-x)dx}{L^2 \zeta_3 y(x)} \quad (14)$$

$$\theta''_y = \frac{L}{A I_y} G''_y, \quad \text{siendo: } G''_y = \int_0^L \frac{M_{is,y}(x) x dx}{L^2 \zeta_3 y(x)} \quad (15)$$

G'_y y G''_y son los términos de carga, que se emplearán para calcular los valores extremos de acciones en la barra de sección variable empotrada.

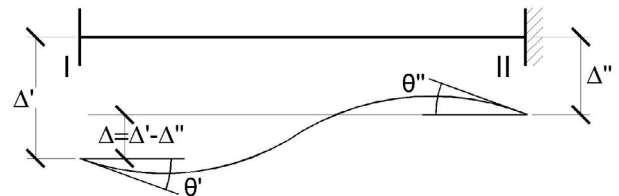


Figura 4. Barra con giros y traslaciones de extremo.

En la barra representada en la [Figura 4](#), con giros de extremo θ' , θ'' y traslaciones de extremo Δ' , Δ'' , el valor de los giros θ' y θ'' es: [\[1\] 2.05-7](#)

$$\theta' = L/EI_y (\lambda'_y M'_y + \mu_y M''_y + G'_y) + \Delta/L \quad (16)$$

$$\theta'' = L/EI_y (-\mu'_y M'_y + \lambda''_y M''_y - G''_y) + \Delta/L \quad (17)$$

Siendo λ'_y , λ''_y , μ_y , las “formales” o constantes de la barra respecto al eje y , de valor:

$$\lambda'_y = \int_0^L \frac{(L-x)^2 dx}{L^3 \zeta_{3y}(x)} \quad \lambda''_y = \int_0^L \frac{x^2 dx}{L^3 \zeta_{3y}(x)} \quad \mu_y = \int_0^L \frac{x(L-x) dx}{L^3 \zeta_{3y}(x)} \quad (18)$$

Y para expresar la rigidez de la barra se definen: [\[1\] 2.05-8](#)

$$\rho'_y = \frac{\lambda''_y}{\lambda'_y \lambda''_y - \mu_y^2} \quad \rho''_y = \frac{\lambda'_y}{\lambda'_y \lambda''_y - \mu_y^2} \quad \eta_y = \frac{\mu_y}{\lambda'_y \lambda''_y - \mu_y^2} \quad (19)$$

El cálculo de los coeficientes de rigidez de una barra que se produce, bien sea por un giro unitario en sus extremos, o bien sea por desplazamiento lineal en sus extremos puede obtenerse de las expresiones anteriores donde los Términos de Carga son nulos, ya que tales coeficientes son el valor de las acciones que producen un desplazamiento unitario y por tanto no existen cargas a lo largo de la barra.

Para calcular los coeficientes de rigidez analizaremos dos casos, los producidos por un giro unitario extremo normal al eje de la barra y los producidos por un desplazamiento unitario extremo normal al eje de la barra.

2.7. Rigidez por giro unitario en el extremo de la barra de sección variable.

En este caso, representado en la [Figura 5](#), los giros unitarios se corresponden con los movimientos 5 y 11 en el plano XZ (giro en eje y) y 6 y 12 en el plano XY (giro en eje z). Ver [Figura 1.b](#).

En el plano XZ, para los giros 5 y 11 los valores de los momentos y de las fuerzas normales en los extremos de la barra como consecuencia de un giro unitario en su extremo I, se puede obtener de (16 y 17) haciendo:

$$\theta' = 1, \quad \theta'' = 0, \quad \Delta = 0 \quad (20)$$

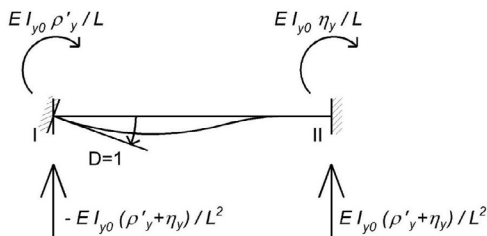


Figura 5. Coeficientes de rigidez por giro unitario en un extremo.

Los valores para el momento y fuerza en el extremo I son:

$$M_{yI} = EI_{y0} \rho'_y / L \quad V_{yI} = -EI_{y0} (\eta_y + \rho'_y) / L^2 \quad (21)$$

Los valores para el momento y fuerza en el extremo II son:

$$M_{yII} = EI_{y0} \eta_y / L \quad V_{yII} = EI_{y0} (\eta_y + \rho'_y) / L^2 \quad (22)$$

En el plano XY se puede proceder de forma análoga.

Los coeficientes de rigidez debidos al tales giros y movimientos valen:

Plano XZ (giros en eje y):

$$R_{3,5} = -R_{9,5} = -EI_{y0} (\eta_y + \rho'_y) / L^2 \quad R_{5,5} = EI_{y0} \rho'_y / L$$

$$R_{11,5} = EI_{y0} \eta_y / L \quad (23)$$

$$R_{3,11} = -R_{9,11} = -EI_{y0} (\eta_y + \rho''_y) / L^2 \quad R_{5,11} = EI_{y0} \eta_y / L$$

$$R_{11,11} = EI_{y0} \rho''_y / L \quad (24)$$

Plano XY (giros en eje z):

$$R_{2,6} = -R_{8,6} = -EI_{z0} (\eta_z + \rho'_z) / L^2 \quad R_{6,6} = EI_{z0} \eta_z / L$$

$$R_{12,6} = EI_{z0} \rho'_z / L \quad (25)$$

$$R_{2,12} = -R_{8,12} = -EI_{z0} (\eta_z + \rho''_z) / L^2 \quad R_{6,12} = EI_{z0} \eta_z / L$$

$$R_{12,12} = EI_{z0} \rho''_z / L \quad (26)$$

2.8. Rigidez por desplazamiento transversal en los extremos de una barra de sección variable.

Para determinar los coeficientes de rigidez asociados a un desplazamiento en el extremo de la barra normal a su eje, partimos del estudio de la deformación a flexión de la barra del [apartado 2.6](#) anterior.

En este caso, representado en la [Figura 6](#), los desplazamientos unitarios se corresponden con los movimientos 3 y 9 en el plano XZ (desplazamiento en eje z y giro en eje y) y 2 y 8 en el plano XY (desplazamientos en eje y , y giros en eje z). Ver [Figura 1.b](#).

En el plano XZ, para los movimientos 3 y 9 los valores de los momentos y de las fuerzas normales en los extremos de la barra como consecuencia de un desplazamiento unitario en su extremo I, se puede obtener de (16 y 17) haciendo:

$$\theta' = 0, \quad \theta'' = 0, \quad \Delta = 1 \quad (27)$$

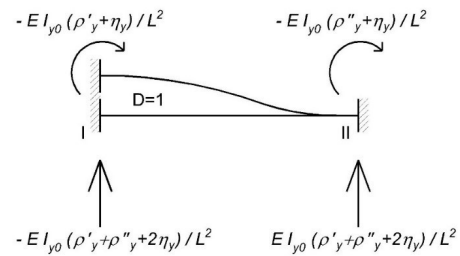


Figura 6. Coeficientes de rigidez por desplazamiento unitario en un extremo.

Los valores para el momento y fuerza en el extremo I son:

$$M_{yI} = -EI_{y0} (\rho'_y + \eta_y) / L^2 = R_{1,2} \quad (28)$$

$$V_{yI} = EI_{y0} (\rho'_y + \rho''_y + \eta_y) / L^3 = R_{2,2} \quad (29)$$

Los valores para el momento y fuerza en el extremo II son:

$$M_{yII} = -EI_{y0}(\rho''_y + \eta_y) / L^2 = R_{3,2} \quad (30)$$

$$V_{yII} = -EI_{y0}(\rho'_y + \rho''_y + 2\eta_y) / L^3 = R_{4,2} \quad (31)$$

En el plano XY se puede proceder de forma análoga.

Los coeficientes de rigidez debidos a tales movimientos valen:

Plano XZ (giros en eje y):

$$\begin{aligned} R_{3,3} &= -R_{9,3} = EI_{y0}(\rho'_y + \rho''_y + 2\eta_y) / L^3 & R_{5,3} &= R_{3,5} \\ R_{11,3} &= R_{3,11} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} R_{3,9} &= -R_{9,3} = -EI_{y0}(\rho'_y + \rho''_y + 2\eta_y) / L^3 & R_{5,9} &= R_{9,5} \\ R_{11,9} &= R_{9,11} \end{aligned} \quad (33)$$

Plano XY (giros en eje z):

$$\begin{aligned} R_{2,2} &= -R_{8,2} = EI_{z0}(\rho'_z + \rho''_z + 2\eta_z) / L^3 & R_{6,2} &= R_{2,6} \\ R_{12,2} &= R_{2,12} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} R_{2,8} &= -R_{8,2} = -EI_{z0}(\rho'_z + \rho''_z + 2\eta_z) / L^3 & R_{6,8} &= R_{8,6} \\ R_{12,8} &= R_{8,12} \end{aligned} \quad (35)$$

3. LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA DE SECCIÓN VARIABLE

Como se ha dicho en el [Apartado 2.1](#), la Matriz R_b de Rigidez de extremos de una barra, de tamaño 12x12, expresa la interrelación entre el vector A_b de acciones equivalentes de extremo con el vector D_b de movimientos de extremo de la barra ([Ec.1](#))

Esta ecuación está referida a los ejes propios de la barra, existiendo para cada extremo de la barra tres posibles movimientos (dos lineales y un giro) para Sistemas Estructurales Planos ([Figura 1.a](#)), y seis posibles movimientos (tres lineales y tres giros) para Sistemas Estructurales en el Espacio ([Figura 1.b](#)).

les y tres giros) para Sistemas Estructurales en el Espacio ([Figura 1.b](#)).

3.1. Matriz de rigidez de una barra de sección variable en el plano.

Adoptando el convenio de signos expresado en la [Figura 1.a](#), la matriz de rigidez R_b de una barra en el plano en función de los parámetros anteriormente definidos será la siguiente: ([tabla 1](#)).

3.2. Matriz de rigidez de una barra de sección variable en el espacio.

Adoptando el convenio de signos expresado en la [Figura 1.b](#), la Matriz de Rigidez de una barra en el espacio será una matriz cuadrada y simétrica de tamaño 12 x 12, que corresponde a seis movimientos por cada nudo de la misma, tres lineales según los ejes y tres rotaciones alrededor de dichos ejes.

La representamos, por comodidad, mediante varias sub matrices:

Matriz de Rigidez R:

$$R_b = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ R_{1,1} & R_{1,2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

siendo las sub matrices ([tablas 2, 3, 4 y 5](#)):

3.3. Acciones en los extremos de la barra de sección variable.

Para determinar el vector A_b de acciones equivalentes de extremos de la barra es preciso calcular las reacciones que producen las cargas o momentos que actúan en la barra.

Entonces, el sistema equivalente de cargas aplicadas en los extremos de las barras puede calcularse a partir de los valores de las reacciones, con signo contrario.

Por tanto, el problema de la determinación del sistema de acciones de extremo de la barra se reduce al cálculo de las reacciones del sistema de cargas real en la barra supuesta empotrada.

TABLA 1.
Matriz de rigidez de una barra de sección variable en el plano.

1	2	3	4	5	6
$EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta) / L^3$	$-EI_0(\rho' + \eta) / L^2$		$-EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta) / L^3$	$-EI_{y0}(\rho'' + \eta) / L^2$	
$-EI_{y0}(\rho' + \eta) / L^2$	$EI_0 \rho' / L$		$EI_{y0}(\rho' + \eta) / L^2$	$EI_0 \eta / L$	
		$\alpha A_0 E / L$			$-\alpha A_0 E / L$
$-EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta) / L^3$	$EI_{y0}(\rho' + \eta) / L^2$		$EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta) / L^3$	$EI_{y0}(\rho'' + \eta) / L^2$	
$-EI_{y0}(\rho'' + \eta) / L^2$	$EI_0 \eta / L$			$EI_0 \rho'' / L$	
		$-\alpha A_0 E / L$			$\alpha A_0 E / L$

(Se ha suprimido el subíndice y por comodidad para I_{y0} , ρ'_y , ρ''_y y η_y) La Matriz de Rigidez R es cuadrada y simétrica y sus coeficientes se indican en tabla, siendo: A el área con A_0 valor de referencia y $\zeta_i(x)$ la ley de variación, ([Ec.2](#)), I el momento de inercia con I_0 valor de referencia ([Ec.4](#)), y $\zeta_3(x)$ su ley de variación, α , λ' , λ'' y η , las formales ([Ecs.7, 18](#)) y ρ' , ρ'' y η , rigideces ([Ec.19](#)).

TABLA 2.
Submatriz $R_{1.1}$.

1	2	3	4	5	6
$\alpha A_0 E / L$					
	$EL_{z0}(\rho_z' + \rho_z'' + 2\eta_z) / L^3$				$EL_{z0}(\eta_z + \rho_z') / L^2$
		$EL_{y0}(\rho_y' + \rho_y'' + 2\eta_y) / L^3$		$-EL_{y0}(\eta_y + \rho_y') / L^2$	
			$\beta I_{t0} G / L$		
		$-EL_{y0}(\eta_y + \rho_y') / L^2$		$EL_{y0} \rho_y' / L$	
	$EL_{z0}(\eta_z + \rho_z') / L^2$				$EL_{z0} \rho_z' / L$

TABLA 3.
Submatriz $R_{1.2}$.

7	8	9	10	11	12
$-\alpha A_0 E / L$					
	$-EL_{z0}(\rho_z' + \rho_z'' + 2\eta_z) / L^3$				$EL_{z0}(\eta_z + \rho_z'') / L^2$
		$-EL_{y0}(\rho_y' + \rho_y'' + 2\eta_y) / L^3$		$-EL_{y0}(\eta_y + \rho_y'') / L^2$	
			$-\beta I_{t0} G / L$		
		$EL_{y0}(\eta_y + \rho_y') / L^2$		$EL_{y0} \eta_y / L$	
	$-EL_{z0}(\eta_z + \rho_z') / L^2$				$EL_{z0} \eta_z / L$

TABLA 4.
Submatriz $R_{2.1}$.

1	2	3	4	5	6
$-\alpha A_0 E / L$					
	$-EL_{z0}(\rho_z' + \rho_z'' + 2\eta_z) / L^3$				$-EL_{z0}(\eta_z + \rho_z') / L^2$
		$-EL_{y0}(\rho_y' + \rho_y'' + 2\eta_y) / L^3$		$-EL_{y0}(\eta_y + \rho_y') / L^2$	
			$-\beta I_{t0} G / L$		
		$-EL_{y0}(\eta_y + \rho_y'') / L^2$		$EL_{y0} \eta_y / L$	
	$EL_{z0}(\eta_z + \rho_z'') / L^2$				$EL_{z0} \eta_z / L$

TABLA 5.
Submatriz $R_{2.2}$.

7	8	9	10	11	12
$\alpha A_0 E / L$					
	$EL_{z0}(\rho_z' + \rho_z'' + 2\eta_z) / L^3$				$-EL_{z0}(\eta_z + \rho_z'') / L^2$
		$EL_{y0}(\rho_y' + \rho_y'' + 2\eta_y) / L^3$		$EL_{y0}(\eta_y + \rho_y'') / L^2$	
			$\beta I_{t0} G / L$		
		$EL_{y0}(\eta_y + \rho_y'') / L^2$		$EL_{y0} \rho_y'' / L$	
	$-EL_{z0}(\eta_z + \rho_z'') / L^2$				$EL_{z0} \rho_z'' / L$

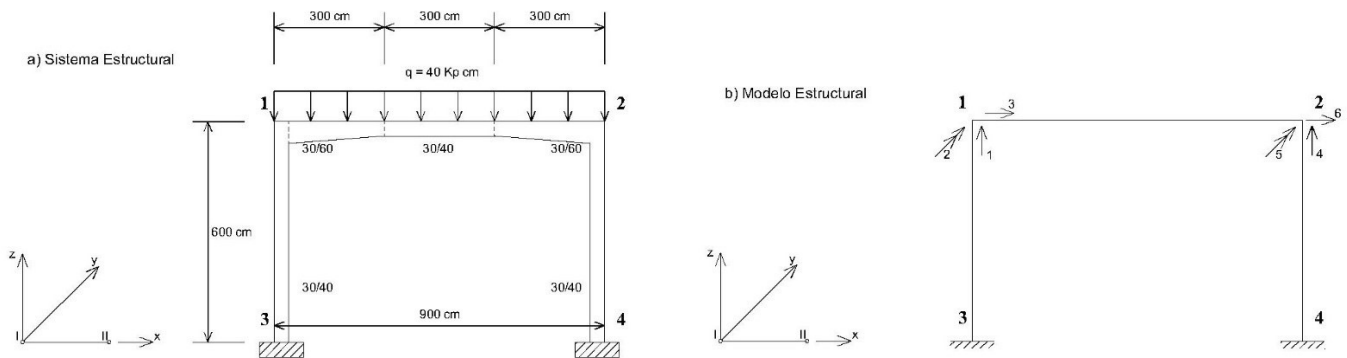


Figura 7. El caso de un pórtico simple. Sistema estructural y Modelo estructural.

Estas acciones de extremo de la barra de sección o rigidez variable son diferentes de las obtenidas para una barra de sección y rigidez constante.

Estas reacciones pueden ser determinadas a partir de las Ecuaciones (16 y 17), haciendo: $\theta'_y = \theta''_y = \Delta = 0$:

$$M'_y = -\rho'_y G'_y + \eta_y G''_y \quad (37)$$

$$M''_y = -\eta_y G'_y + \rho''_y G''_y \quad (38)$$

En esta expresión G'_y , G''_y son los términos de carga definidos en el [Apartado 2.6 \(Ec.14,15\)](#)

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Para ilustrar, paso a paso, el desarrollo del método descrito se plantea el siguiente ejemplo de cálculo

Se trata de un pórtico plano, representado en la [Figura 7](#), compuesto por un dintel acartelado y dos soportes que se suponen empotrados en su base.

El pórtico se plantea con hormigón armado H-25 con AEH-500 y sus datos geométricos y las cargas que actúan se representan en la [Figura 7](#). Las unidades utilizadas son Kp y cm.

4.1. Modelo estructural.

Numeración de barras y nudos.

El modelo estructural que representa esta estructura idealizada y discretizada, ([Figura 7.b](#)), está compuesto de tres elementos estructurales, en este caso las barras 1-2, 1-3 y 2-4. Las barras están conectadas entre sí en sus extremos, que son los nudos del modelo estructural, únicos puntos considerados en la relación entre acciones y movimientos o ecuación de rigidez.

Sustentación de las barras.

El sistema de sustentación de las barras está formado por las conexiones estructurales y las restricciones de movimiento de sus extremos, y es el siguiente:

Los nudos 1 y 2 son conexiones elásticas rígidas y los nudos 3 y 4 son nudos restringidos en todos sus movimientos.

Numeración de los movimientos de nudos.

Los movimientos de los nudos se numeran siguiendo el orden expresado en la [Figura 7. b](#). Se omiten los correspondientes a los nudos 3 y 4 por ser nulos.

Todos los movimientos se refieren al sistema general de ejes de la estructura, que en este caso coinciden con los ejes de la barra 1-2.

Sección de las barras y términos de variación del área e inercia a lo largo de las barras.

Los términos de variación de la sección e inercia de las barras $A(x)$ e $I_y(x)$, definidos en el [Apartado 2.3 \(Ec. 2,4\)](#) son los siguientes:

Valores de referencia:

$$A_0 = 30 \times 40 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$I_{y0} = 30 \times 40^3 / 12 = 160.000 \text{ cm}^4 \quad E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2$$

Barras 1-3 y 2-4:

Son de sección constante igual al valor de referencia:

$$A = A_0 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$I_y = I_0 = 160.000 \text{ cm}^4$$

Los términos de variación son:

$\xi_1(x) = \xi_{3y}(x) = 1$, con lo cual las formales (7,18 y 19) son:

$$\alpha_z = 1 \quad \lambda'_y = \lambda''_y = 1/3 \quad \mu_y = 1/6 \quad \rho'_y = \rho''_y = 4 \quad \eta_y = 2$$

Barra 1-2:

Es de sección variable por las cartelas y está dividida en tres tramos, de longitud 1/3 de la luz.

Los términos de variación son:

Tramo (0,300):

$$\xi_1(x) = 1,5 - x/600 \quad \xi_3(x) = (1/40^3) * (60 - 20x/300)^3$$

Tramo (300,600):

$$\xi_1(x) = 1 \quad \xi_3(x) = 1$$

Tramo (600,900):

$$\xi_1(x)=1+(x-600)/600 \quad \xi_3(x)=(1/40^3)*(40+20(x-600)/300)^3$$

$$\alpha = \frac{900}{\int_0^{300} \frac{dx}{1,5 \frac{x}{600}} + \int_{600}^{900} \frac{dx}{1 + \frac{x-600}{600}}} = 1.14422$$

$$\lambda' = (40^3/900^3) * \left(\int_0^{300} \frac{(900-x)^2 dx}{(60 - \frac{20x}{300})^3} + \int_{300}^{600} \frac{(900-x)^2 dx}{40^3} + \right.$$

$$\left. \int_{600}^{900} \frac{(900-x)^2 dx}{(40 + \frac{20(x-600)}{300})^3} \right) = 0,2156$$

$$\lambda'' = (40^3/900^3) * \left(\int_0^{300} \frac{x^2 dx}{(60 - \frac{20x}{300})^3} + \int_{300}^{600} \frac{x^2 dx}{40^3} + \right.$$

$$\left. \int_{600}^{900} \frac{x(900-x) dx}{(40 + \frac{20(x-600)}{300})^3} \right) = 0,1363$$

$$\rho'_y = \frac{\lambda''}{\lambda' \lambda'' - \mu^2} = 0,2156/0,0279 = 7,7249$$

$$\rho''_y = \frac{\lambda'}{\lambda' \lambda'' - \mu^2} = 0,2156/0,0279 = 7,7249$$

$$\eta_y = \frac{\mu}{\lambda' \lambda'' - \mu^2} = 0,1363/0,0279 = 4,8828$$

4.2. Sistema de acciones equivalente que actúa sobre los extremos de las barras.

El sistema de acciones que actúa en el sistema estructural está formado por la carga repartida q , que ha de ser sustituida por un sistema equivalente de cargas que actúe en los extremos de las barras para mantener el carácter discreto de estos elementos estructurales. El sistema equivalente está compuesto por las reacciones: M' , M'' , V' , V'' , producidas por la carga q en los nudos 1 y 2. Los valores de $M'y$, $M''y$ se determinan de la manera siguiente (Ec.36 y 37):

Para la barra 1-2, con: $Mis_y(x) = q x (L-x)/2$, los términos de carga $G'y$ y $G''y$ son:

$$G'_y = \int_0^L \frac{Mis_y(x)(L-x)dx}{L^2 \xi_3 y(x)} 40 / (2*900^2) * (40^3 (\int_0^{300} \frac{x(900-x)^2 dx}{(60 - \frac{20}{300})^3} + \int_{300}^{600} \frac{x(900-x)^2 dx}{40^3} + \int_{600}^{900} \frac{x(900-x)^2 dx}{(40 + \frac{20}{300} (x-600))^3})) = 1.103.772$$

$$G''_y = \int_0^L \frac{Mis_y(x)(L-x)dx}{L^2 \xi_3 y(x)} 40 / (2*900^2) * (40^3 (\int_0^{300} \frac{x^2(900-x) dx}{(60 - \frac{20}{300})^3} + \int_{300}^{600} \frac{x^2(900-x) dx}{40^3} + \int_{600}^{900} \frac{x^2(900-x) dx}{(40 + \frac{20}{300} (x-600))^3})) = 1.103.772$$

Las reacciones M' , M'' , V' , V'' , valen:

$$M'_y = -\rho'_y G'_y + \eta_y G''_y = -3.137.025 \text{ cm Kp} \quad V' = 18.000 \text{ Kp}$$

$$M''_y = -\eta_y G'_y + \rho''_y G''_y = 3.137.025 \text{ cm Kp} \quad V'' = 18.000 \text{ Kp}$$

El sistema de acciones equivalentes (reacciones cambiadas de signo) para la barra 1-2 puede representarse por el vector A , cuyas componentes concuerdan con la numeración de los movimientos:

$$A = \begin{pmatrix} V' \\ M' \\ N' \\ V'' \\ M'' \\ N'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18.000 \\ 3.137.025 \\ 0 \\ -18.000 \\ -3.137.025 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Las acciones equivalentes producidas por las barras 1-3 y 2-4 son nulas al no existir cargas que actúen sobre las mismas.

4.3. Cálculo de los coeficientes de la Matriz de Rigidez.

Los coeficientes de la Matriz de Rigidez del modelo estructural se determinan aplicando movimientos unitarios en sus nudos, y su valor es la suma de los coeficientes de rigidez de las barras que concurren en el nudo.

En la Figura 8 se representan los seis movimientos no coartados de la estructura, ya que los seis que corresponden a los nudos 3 y 4 son nulos por hipótesis de partida.

Los coeficientes de rigidez de las barras que concurren en cada nudo se calculan a partir de los coeficientes de rigidez de dichas barras que concurren en el nudo.

Los coeficientes de la Matriz de Rigidez se numeran con dos subíndices:

- El primer subíndice es el número del coeficiente de rigidez, para el cual seguiremos el mismo orden que para los movimientos de los nudos (ver Figura 7.b).
- El segundo subíndice es el número del movimiento que origina el coeficiente de rigidez.

El sistema general de ejes coincide con el de la barra 1-2 y los coeficientes de rigidez debidos a las barras 1-3 y 2-4 se han referido directamente a este sistema de ejes.

Coefficientes de rigidez debidos al movimiento 1.

(Afecta a las barras 1-2 y 1-3).

Se toma

$$E=310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0=1.200 \text{ cm}^2, I_0=I_{y0}= 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1,1}=A_0 E/L + \frac{EI_0(\rho'+\rho''+2\eta)}{L^3} = \frac{A_0 E/L}{600} + \frac{EI_0(7,7249+7,7249+2*4,8828)}{900^3}$$

$$= \mathbf{620.000} + 1.716 = 621.716$$

$$R_{2,1} = -\frac{EI_0(\rho'+\eta)}{L^2} = -\frac{EI_0(7,7249+4,8828)}{900^2} = -772.025$$

ACCIONES PRODUCIDAS POR MOVIMIENTOS UNITARIOS

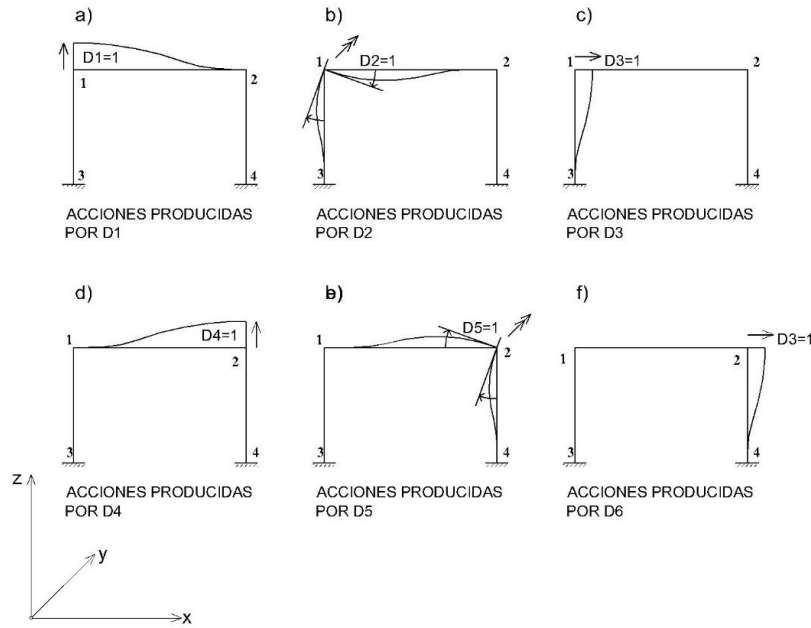


Figura 8. Movimientos unitarios para el cálculo de los coeficientes de rigidez.

$$R_{3,1} = 0$$

$$R_{4,1} = -\frac{EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta)}{L^3} = -\frac{EI_0(7,7249 + 7,7249 + 2 \cdot 4,8828)}{900^3} = -1.716$$

$$R_{5,1} = -\frac{EI_0(\rho'' + \eta)}{L^2} = -\frac{EI_0(7,7249 + 4,8828)}{900^2} = -772.025$$

$$R_{6,1} = 0$$

Coeficientes de rigidez debidos al movimiento 2.

(Afecta a las barras 1-2 y 1-3).

Se toma

$$E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0 = 1.200 \text{ cm}^2, I_0 = I_{y0} = 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1,2} = R_{2,1}$$

$$R_{2,2} = \frac{4EI}{L} + \frac{EI_0\rho'}{L} = \frac{4EI_0}{600} + \frac{EI_0 \cdot 7,7249}{900} = \mathbf{330.666} + 425.727 =$$

$$756.393$$

$$R_{3,2} = -\frac{6EI_0}{L^2} + \frac{6EI_0}{600^2} = -826.667$$

$$R_{4,1} = -\frac{EI_0(\rho' + \eta)}{L^2} = -\frac{EI_0(7,7249 + 4,8828)}{900^2} = -772.025$$

$$R_{5,2} = \frac{EI_0\eta}{L} = \frac{EI_0 \cdot 4,8828}{900} = 269.096$$

$$R_{6,2} = 0$$

Coeficientes de rigidez debidos al movimiento 3.

(Afecta a las barras 1-2 y 1-3)

Se toma

$$E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0 = 1.200 \text{ cm}^2, I_0 = I_{y0} = 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1,3} = R_{3,1}$$

$$R_{2,3} = R_{3,2}$$

$$R_{3,3} = \frac{12EI}{L^3} + \alpha A_0 E \frac{12EI_0}{600^3} = 1.14422 \cdot A_0 E = \mathbf{2.756} + 472.946 = 475.702$$

$$R_{4,3} = 0$$

$$R_{5,3} = 0$$

$$R_{6,3} = \alpha A_0 E = -472.946$$

Coeficientes de rigidez debidos al movimiento 4.

(Afecta a las barras 1-2 y 2-4)

Se toma

$$E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0 = 1.200 \text{ cm}^2, I_0 = I_{y0} = 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1,4} = R_{4,1}$$

$$R_{2,4} = R_{4,2}$$

$$R_{3,4} = R_{4,3}$$

$$R_{4.4} = \alpha A_0 E + \frac{EI_0(\rho' + \rho'' + 2\eta)}{L^3} = \frac{A_0 E}{600} +$$

$$\frac{EI_0(7,7249 + 7,7249 + 2 \cdot 4,8828)}{900^3} = \mathbf{620.000} + 1.716 = 621.716$$

$$R_{5.2} = \frac{EI_0(\rho'' + \eta)}{L^2} = \frac{EI_0(7,7249 + 4,8828)}{900^2} = 772.025$$

$$R_{6.4} = 0$$

Coefficientes de rigidez debidos al movimiento 5.
(Afecta a las barras 1-2 y 2-4)

Se toma

$$E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0 = 1.200 \text{ cm}^2, I_0 = I_{y0} = 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1.5} = R_{5.1}$$

$$R_{2.5} = R_{5.2}$$

$$R_{3.5} = R_{5.3}$$

$$R_{4.5} = R_{5.4}$$

$$R_{5.5} = \frac{4EI}{L} + \frac{EI_0 \rho'}{L} = \frac{4EI_0}{600} + \frac{EI_0 \cdot 7,7249}{900} = \mathbf{330.666} + 425.727 =$$

$$756.393$$

$$R_{3.2} = -\frac{6EI_0}{L^2} + \frac{6EI_0}{600^2} = -826.667$$

Coefficientes de rigidez debidos al movimiento 6.
(Afecta a las barras 1-2 y 2-4)

Se toma

$$E = 310.000 \text{ Kp/cm}^2, A_0 = 1.200 \text{ cm}^2, I_0 = I_{y0} = 160.000 \text{ cm}^4$$

(Se representan en negrita los coeficientes debidos a las barras 1-3 y 2-4)

$$R_{1.6} = R_{6.1}$$

$$R_{2.6} = R_{6.2}$$

$$R_{3.6} = R_{6.3}$$

$$R_{4.6} = R_{6.4}$$

$$R_{5.6} = R_{6.5}$$

$$R_{6.6} = \frac{12EI}{L^3} + \alpha A_0 E = \frac{12EI_0}{600} 1.14422 \cdot A_0 E = \mathbf{2.756} + 472.946 =$$

$$475.702$$

4.4. Matriz de Rigidez y ecuación de rigidez.

Los coeficientes que componen la Matriz de Rigidez total R han sido calculados en el Apartado anterior. Los movimientos de los nudos están expresados por el vector D y las ac-

ciones asociadas a los mismos se expresan por el vector A , calculado en el [Apartado 4.2.](#)

La ecuación de rigidez del modelo es:

$$RD = A$$

que es una matriz simétrica, con valores:

$$R =$$

621.716	-772.025	0	-1.716	-772.025	0
-772.025	756.393.320	-826.667	772.025	269.095.631	0
0	-826.667	475.702	0	0	-472.946
-1.716	772.025	0	621.716	772.025	0
-772.025	269.095.631	0	772.025	756.393.320	-826.667
0	0	-472.946	0	-826.667	475.702

$$A = \begin{pmatrix} -18.000 \\ 3.137.025 \\ 0 \\ -18.000 \\ -3.137.025 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver la ecuación $RD = A$ se obtienen los valores de los movimientos D , cuyo valor es:

$$D = \begin{pmatrix} -0,0290323 \\ 0,00644712 \\ 0,00561812 \\ -0,0290323 \\ -0,0064471 \\ -0,0056181 \end{pmatrix}$$

4.5. Cálculo de acciones en los extremos de las barras.

Las acciones en los extremos de cada barra se calculan a partir de la Matriz de Rigidez de la barra, de las acciones iniciales en sus extremos y de los movimientos resultantes en dichos extremos.

Para la barra 1-2, su Matriz de Rigidez (considerando solo los valores que corresponde a esta barra) es la siguiente:

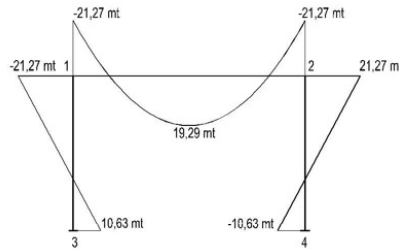
$$R_{1-2} =$$

1.716	-772.025	0	-1.716	-772.025	0
-772.025	425.726.653	0	772.025	269.095.631	0
0	0	472.946	0	0	-472.946
-1.716	772.025	0	1.716	772.025	0
-772.025	269.095.631	0	772.025	425.726.653	0
0	0	-472.946	0	0	475.702

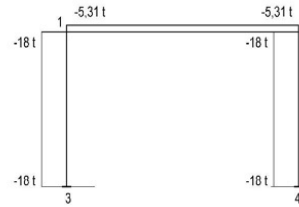
Las acciones totales de la barra A_{1-2} serán la suma de las acciones inicialmente supuestas para sus extremos con movimientos nulos en sus extremos $A_{1-2,r}$ más las acciones $A_{1-2,d}$ producidas por los movimientos de extremo que resultan de la ecuación de rigidez que se obtiene multiplicando la matriz anterior R_{1-2} de la barra 1-2 por el vector D .

RESULTADOS DEL CÁLCULO

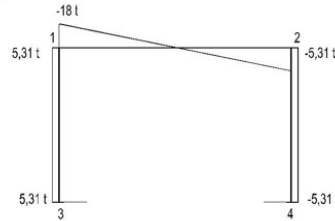
a) Gráfica de Momentos Flectores



a) Gráfica de Axiles



b) Gráfica de esfuerzos Cortantes



a) Gráfica de Movimientos

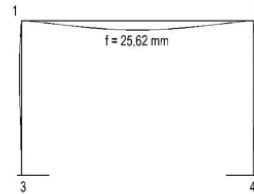


Figura 9. Resultados del Cálculo.

$$A_{1,2} = -A_{1,2r} + R_{1,2} D$$

$$A_{1,2r} = \begin{pmatrix} -18.000 \\ 3.137.025 \\ 0 \\ -18.000 \\ -3.137.025 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{1,2} D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.009820 \\ 5.314 \\ 0 \\ -1.009820 \\ 5.314 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 18.000 \\ -2.127.205 \\ 5.314 \\ 18.000 \\ 2.127.205 \\ 5.314 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' \\ M' \\ N' \\ V'' \\ M'' \\ N'' \end{pmatrix}$$

Estos valores representan el esfuerzo cortante, el momento y el esfuerzo normal en el extremo izquierdo y en el derecho respectivamente de la barra 1-2 expresados en Kp y en cm Kp.

Las acciones en los extremos de las barras 1-3 y 2-4 se determinan a partir de los valores de acciones extremas en la barra 1-2 ya que los valores de los momentos de empotramiento en la base son iguales a la mitad y con signo contrario a los de su extremo superior.

4.6. Resultados del Cálculo.

Las solicitaciones que resultan del cálculo se exponen a continuación de forma gráfica cambiando las unidades a *m* y *t* (metros y toneladas).

Una vez dimensionadas las barras con hormigón H-25 y AE-500, las secciones de acero necesarias para la flexión según la norma EHE-08 y comprobadas con tricalc-11, son las siguientes:

SECCIONES DE ACERO NECESARIAS

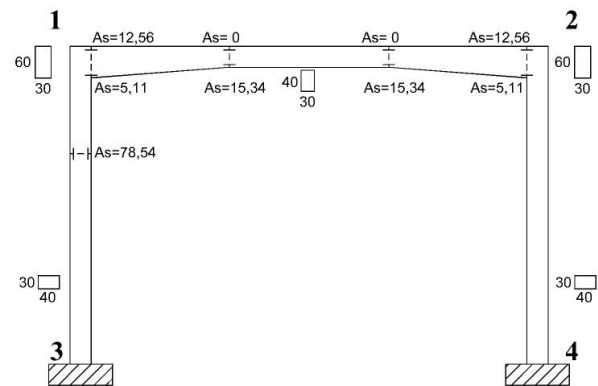


Figura 10. Secciones de armaduras necesarias.

5.

APLICACIÓN DEL MÉTODO PARA EL CÁLCULO ANELÁSTICO DEL HORMIGÓN ARMADO

Una aplicación del método puede ser el cálculo de pórticos compuestos por barras de hormigón armado teniendo en cuenta su fisuración, la cual se produce en buena parte de la longitud de algunas de sus barras donde se reduce considerablemente la rigidez en las zonas fisuradas.

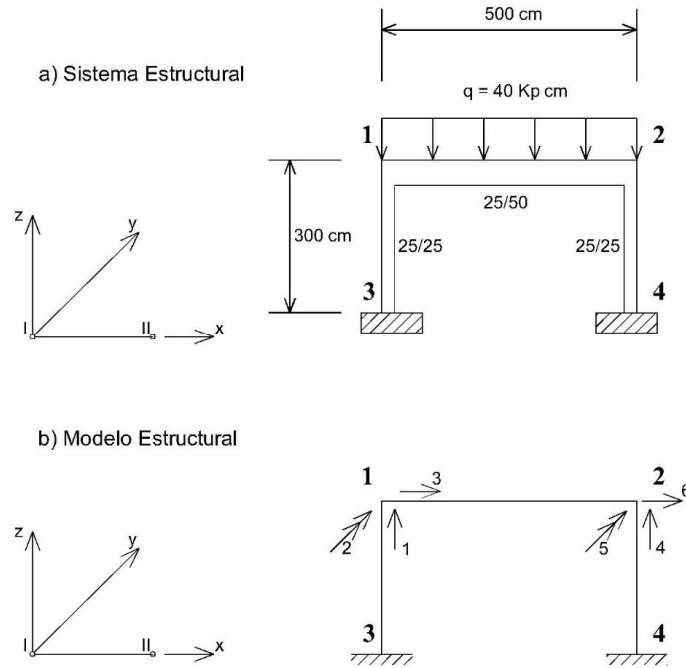


Figura 11. Pórtico y Modelo Estructural.

Sin embargo, la rigidez en estas zonas fisuradas depende de las características del hormigón y también de la sección y características de las armaduras que se disponen, por lo cual es necesario realizar un cálculo previo que determine la sección de tales armaduras y, con estos datos, calcular las leyes de variación de la sección equivalente, y de la rigidez equivalente a lo largo de las barras para, nuevamente recalculer el pórtico con estos valores.

Si tras resultado que se obtiene es preciso modificar las armaduras, el pórtico se deberá recalculer una vez más, hasta conseguir una aproximación suficiente.

5.1. La rigidez en una barra de hormigón armado en estado no fisurado y fisurado.

En cada barra las leyes de variación a lo largo de su eje de: a) el área de su sección, b) el módulo de torsión y c) los momentos de inercia en los ejes normales a su directriz, se han definido en 2.3 a partir de unos valores de referencia A_0 , I_{t0} , I_{y0} , I_{z0} , que, para un pórtico plano sin torsión son solo estos dos:

$$\begin{aligned} \text{Área de la sección variable} & A(x) = A_0 \zeta_1(x) \\ \text{Momento de Inercia variable en el eje y} & I_y(x) = I_{y0} \zeta_{y3}(x) \end{aligned}$$

Leyes de variación en Estado no Fisurado

En estado no fisurado estas leyes de variación son $\zeta_i(x) = \zeta_{y3}(x) = 1$ con lo cual las formales y rigideces (7, 18 y 19) son:

$$\alpha_z = 1 \quad \lambda'_{y'} = \lambda''_{y'} = 1/3 \quad \mu_y = 1/6 \quad \rho'_{y'} = \rho''_{y'} = 4 \quad \eta_y = 2$$

Leyes de variación en Estado Fisurado

En estado fisurado, para determinar las leyes de variación $\zeta_i(x)$ y $\zeta_{y3}(x)$ se plantea lo siguiente:

- Para la variación de la sección, tanto en vigas como en soportes, considerar la sección constante con $\zeta_i(x) = 1$. La razón para ello es que los soportes, salvo los extremos, no suelen estar fisurados en la mayor parte de su longitud, y las vigas resultan con esfuerzos normales de escaso valor, con lo que la rigidez normal es poco relevante.
- Para la variación de la inercia $\zeta_{y3}(x)$, considerar una inercia equivalente igual a la establecida para calcular la flecha instantánea en EHE-08 50.2.2 y su Anejo 8° 2.2, [4], esto es:

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M(x)} \right)^3 \cdot I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M(x)} \right)^3 \right] \cdot I_f \leq I_b, \text{ con:} \quad (40)$$

M_f	$f_{ctm,fl}$	W_b	Momento de fisuración
$M(x)$			Momento en la sección (x)
$f_{ctm,fl}$	$\max [(1,6-h/1000)f_{ctm}; f_{ctm}]$		
	Resistencia a flexotracción		
W_b	Módulo resistente sección bruta		
I_b	Mom. de Inercia sección bruta		
I_f	Mom. de la sección fisurada		

El valor de la inercia fisurada I_f (Anejo 8° 2.2 EHE-08) es el siguiente:

$$I_f = n A_{s1} (d-X) (d-X/3) + n A_{s2} (X-d') (X/3-d') \quad (41)$$

Siendo X la profundidad de la fibra neutra, de valor:

$$X = d \cdot n \cdot \rho_1 \cdot (1 + \rho_2 / \rho_1) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{\rho_2 \cdot d'}{\rho_1 \cdot d} \right)^2}{n \cdot \rho_1 \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2}} \right], \text{ con:} \quad (42)$$

$$n = E_s / E_c; \quad \rho_1 = A_{s1} / b d; \quad \rho_2 = A_{s2} / b d \quad (43)$$

A partir de estos valores de M_f , I_b , I_f y del valor $I(x)$ en cada sección a lo largo de la barra, se pueden determinar las formas y las rigideces de la barra: α_z ; λ'_y ; λ''_y ; μ_y ; ρ'_y ; ρ''_y ; η_y .

5.2. Ejemplo de aplicación y comparación de resultados.

La mejor forma de ilustrar el resultado de aplicar los criterios anteriores es mediante un ejemplo.

Para ello se propone estudiar un pórtico plano similar al analizado en el apartado 4 y con estas características:

Pórtico plano compuesto por un dintel y dos soportes de sección constante empotrados en su base.

El pórtico se plantea con hormigón armado H-25 con AEH-500 y sus datos geométricos y las cargas que actúan se representan en la Figura 11. Las unidades utilizadas son Kp y cm.

5.2.1 Cálculo elástico.

En primer lugar, se realiza un cálculo elástico del pórtico (utilizando Tricalc-11) obteniendo los valores siguientes para las armaduras:

Los axiles, cortantes y momentos en los extremos del dintel son:

$N = -1,22 \text{ t}$; $V = -10 \text{ t}$ y $M = -2,45 \text{ mt}$, que equivale a un $qL^2 / 40,86$.

En los pilares $N = -10 \text{ t}$; $V = -1,22 \text{ t}$ y $M = -2,45 \text{ mt}$ en cabeza y $1,23 \text{ mt}$ en la base.

Las armaduras necesarias son las indicadas en la Figura 12.

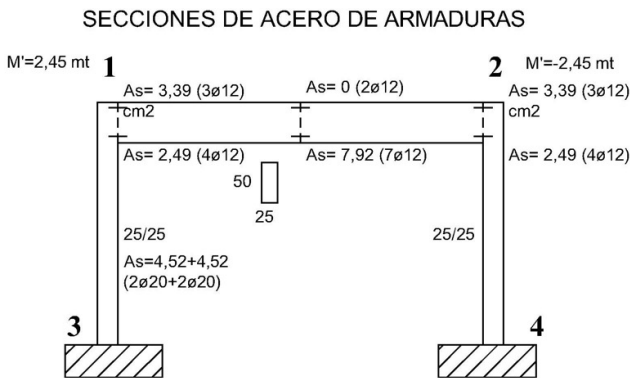


Figura 12. Secciones de armaduras necesarias.

Nota: se consideran las secciones reales de las armaduras, no las necesarias.

5.2.2. Cálculo anelástico.

A partir de los valores anteriores se calculan en primer lugar las leyes de variación de la Inercia equivalente para lo cual hay que partir de los valores de la inercia bruta I_b , momento de fisuración M_f , inercia fisurada I_f , momentos de empotramiento M' y M'' , tanto para el dintel como para los soportes. En el dintel, M_f e I_f son diferentes en la zona de momentos negativos y en zona de momentos positivos, ya que dependen de la sección de las armaduras en estas zonas.

Al realizar el cálculo hay que suponer unos ciertos valores de empotramiento M' y M'' que a su vez dependen de las formas y términos de carga. Esto obliga, en el caso del dintel, a realizar un tanteo con unos valores M' y M'' supuestos inicialmente, y modificarlos según resulte el valor calculado de

estos momentos de empotramiento hasta un valor con aproximación suficiente.

Una vez ajustados, de manera que los valores supuestos para M' y M'' coincidan con el calculado a través de las formas y términos de carga, se determina la ley de variación de la inercia equivalente $\xi_3(x)$, así como de la $\xi_1(x)$ que hemos supuesto de valor 1.

Los valores obtenidos una vez ajustados los valores de M' y M'' son:

a) Dintel 1-2 en las zonas de momentos negativos y positivos:

DATOS SECCIÓN	ZONA NEG	ZONA POS	PARA CÁLCULO	ZONA NEG	ZONA POS
b=	25,00	25,00	PROF. FIBRA NEUTRA		
d=	47,00	47,00	A	3,62686681	4,29258449
d'=	3,00	3,00	X=	7,76885026	11,8335565
h=	50,00	50,00	INERCIA BRUTA		
As1=	3,39	7,92	Ib=	260.416,67	260.416,67
As2=	4,52	2,26	MODULO RES. SECCION BRUTA		
ρ_1 =	0,00288511	0,00674043	Wb=	10.416,67	10.416,67
ρ_2 =	0,00384681	0,00192340	MOMENTO DE FISURACIÓN		
n=	6,77	6,77	Mf=	297.917	297.917
fctm,fl=	28,6	28,6	INERCIA FISURADA (NEG-POS):		
fct,m=	26,00	26,00	If=	39.925,74	81.311,71
A=	1.250,00	1.250,00	MÓD. DE ELASTICIDAD		
DATOS DE LA BARRA			E=	310.000,00	310.000,00
L=	500	500			
q=	40	40			
M'=	749.027,5	cmkp		$= q L^2 / 13,35$	
M''=	-749.027,5	cmkp		$= q L^2 / 13,35$	
N=	0	kp			

Con estos datos se obtienen los valores de formales: λ'_y ; λ''_y ; μ_y ; términos de carga G' ; G'' , rigideces ρ'_y ; ρ''_y ; η_y , y momentos M' y M''

$$\begin{aligned}\lambda'_y &= \lambda''_y = 0,605216743 \\ \mu_y &= 0,258898341 \\ G' &= G'' = 647.245,85 \\ \alpha &= 1 \\ \rho'_y &= \rho''_y = 2,02238474 \\ \eta_y &= 0,865131477 \\ M' &= -M'' = 749.027,38\end{aligned}$$

En el dintel 1-2, los valores que se obtienen de $\xi_3(x)$ se aprecian en el siguiente gráfico:

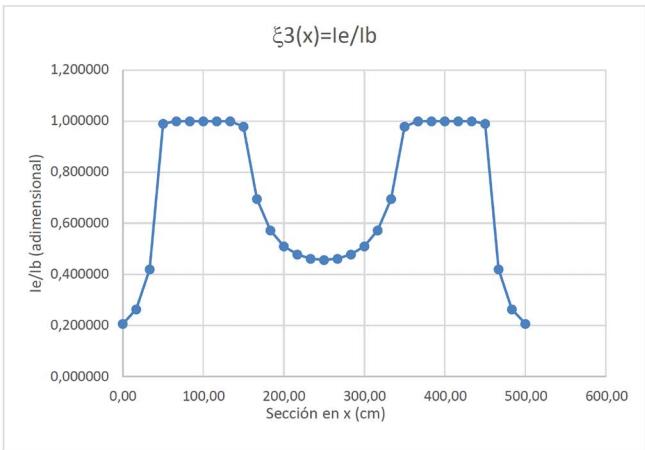


Figura 13. Gráfica de rigideces relativas.

a) Soportes 1-3 y 2-4:

DATOS DE LA SECCIÓN		DATOS PARA EL CÁLCULO	
b=	25,00 cm	PROFUNDIDAD FIBRA NEUTRA	
d=	22,00 cm	A	1,889678737
d'=	3,00 cm	x=	6,427266026
h=	25,00 cm	INERCIA BRUTA	
As1=	6,28 cm ²	Ib=	32.552,08 cm ⁴
As2=	6,28 cm ²	MODULO RES. SECCION BRUTA	
ρ1=	0,01141818	Wb=	2.604,17
ρ2=	0,01141818	MOMENTO DE FISURACIÓN	
n=	6,77	Mf=	133.073 cmkp
fctm,fl=	51,1 kp/cm ²	INERCIA FISURADA:	
fct,m=	26,00 kp/cm ²	If=	13.022,43
A=	625,00 cm ²	MÓD. DE ELASTICIDAD DEL HORMIGÓN	
DATOS DE LA BARRA		E=	310.000,00 kp/cm ²
L=	300 cm		
q=	0 kp/cm		0 t/ml
M'=	749.027,50 cmkp		7,490275 mt
M''=	-374513,75 cmkp		-3,7451375 mt
N=	-10000 kp		-10 t

Nota: Para establecer el valor del momento de fisuración M_f se ha tenido en cuenta la carga axil, incrementando el valor de $f_{ctm,fl}$.

Con los datos anteriores, para el dintel, se obtienen los valores de formales: λ'_y ; λ''_y ; μ_y ; términos de carga G' ; G'' , rigideces ρ'_y ; ρ''_y ; η_y , y momentos M' y M''

$$\begin{aligned}
 \lambda'_y &= 0,605216743 \\
 \lambda''_y &= 0,605216743 \\
 \mu_y &= 0,258898341 \\
 G' &= G'' = 647245,85 \\
 \alpha &= 1 \\
 \rho'_y &= 2,02238474 \\
 \rho''_y &= 2,02238474 \\
 \eta_y &= 0,865131477 \\
 M' &= -M'' = -749.027,38
 \end{aligned}$$

En los **soportes 1-3 y 2-4**, los valores que se obtienen de $\xi_3(x)$ se aprecian en el siguiente gráfico:

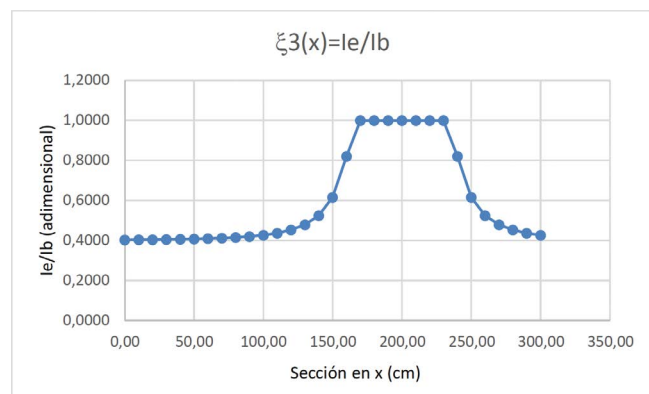


Figura 14. Gráfica de rigideces relativas en soportes 1-3 y 2-4.

Realizado esto, se calculan los coeficientes de la Matriz de Rigidez de cada barra y del total del modelo y se realiza el cálculo.

Las acciones de extremo de barra para el cálculo matricial son estas:

ACCIONES DE EXTREMO

$$\begin{aligned}
 V' &= -10.000,00 \text{ kp} \\
 M' &= 749.027,50 \text{ cm*kp} \\
 N' &= 0,00 \text{ kp} \\
 V'' &= -10.000,00 \text{ kp} \\
 M'' &= -749.027,50 \text{ cm*kp} \\
 N'' &= 0,00 \text{ kp}
 \end{aligned}$$

La Matriz de Rigidez es:

649.563	-932.427	0	-3.730	-932.427	0
-932.427	383.502.416	-289.553	932.427	139.682.686	0
0	-289.553	777.145	0	0	-775.000
-3.730	932.427	0	649.563	932.427	0
-932.427	139.682.686	0	932.427	383.502.416	-289.553
0	0	-775.000	0	-289.553	777.145

Las acciones de extremo resultantes del cálculo son:

D=	Rm*D=	Amr=	Am=	Am en m y t
-0,015483871	0,00	-10.000,00	-10.000,00	-10,00
0,003072735	574.135,00	749.027,50	174.892,50	1,75
0,00057322	888,49	0,00	-888,49	-0,89
-0,015483871	0,00	-10.000,00	-10.000,00	-10,00
-0,003072735	-574.135,00	-749.027,50	-174.892,50	-1,75
-0,00057322	-888,49	0,00	888,49	0,89

En la última columna los valores son en metros y toneladas y en la anterior en cm y Kp.

Se observa que los momentos equivalen a: $q L^2 / 57,18$, que es un 40% menor que el resultado del cálculo elástico.

5.2.3. Recálculo de la sección de armaduras necesarias.

Con los valores anteriores se procede a calcular la sección de armaduras necesaria en dintel (negativos y positivos) y soportes, resultando:

Dintel:

En apoyos (negativo):

$$A_{s,sup} = 3,39 \text{ cm}^2 (3\phi 12); A_{s,inf} = 4,52 \text{ cm}^2 (4\phi 12)$$

Centro vano (positivo):

$$A_{s,sup} = 2,26 \text{ cm}^2 (2\phi 12); A_{s,inf} = 7,92 \text{ cm}^2 (7\phi 12)$$

Soportes (armadura continua):

$$A_{s,sup} = A_{s,inf} = 4,02 \text{ cm}^2 (2\phi 16)$$

Al modificar los parámetros y recalcular resulta:

D=	Rm*D=	Amr=	Am=	Am en m y t
-0,015483871	0,00	-10.000,00	-10.000,00	-10,00
0,003295069	615.677,60	749.027,50	133.349,90	1,33
0,000441778	684,76	0,00	-684,76	-0,68
-0,015483871	0,00	-10.000,00	-10.000,00	-10,00
-0,003295069	-615.677,60	-749.027,50	-133.349,90	-1,33
-0,000441778	-684,76	0,00	684,76	0,68

Al comparar los resultados se aprecia que el momento flector es 1,33 mt, es decir un 54% de lo que resulta en cálculo elástico. Y esto se debe solo a la disminución de la armadura de los soportes que pasa de 4φ20 a 4φ16 mientras que en el dintel resulta con la misma armadura anterior.

5.2.4. Análisis del resultado.

Se observa una pérdida de rigidez respecto del cálculo elástico bastante elevada, debido solo a la escasa rigidez de los soportes, con poca carga axil en este ejemplo, y fisurados en buena parte de su longitud, y esto es un caso extremo.

En la mayor parte de los pórticos la rigidez de los soportes es bastante más elevada, por lo que resulta interesante observar cómo cambia el resultado aumentando la rigidez de los soportes; y para ello se ha modificado la sección de los soportes a 50/25 en lugar de 25/25, obteniéndose lo siguiente:

Con sección de los soportes de 25/50.

En cálculo elástico, el momento de los extremos del dintel es de 6,38 mt y las secciones de acero necesarias son:

Dintel:

En apoyos (negativo):

$$A_{s,sup} = 4,52 \text{ cm}^2 (4\phi 12); A_{s,inf} = 4,52 \text{ cm}^2 (4\phi 12)$$

Centro vano (positivo):

$$A_{s,sup} = 2,26 \text{ cm}^2 (2\phi 12); A_{s,inf} = 4,52 \text{ cm}^2 (4\phi 12)$$

Soportes (armadura continua):

$$A_{s,sup} = A_{s,inf} = 6,78 \text{ cm}^2 (6\phi 16)$$

En cálculo anelástico el momento de los extremos del dintel resultante es 5,84 mt, es decir, un 91,5% Del valor elástico.

En resumen, es la rigidez de los soportes la que más influye en la diferencia entre los resultados que se obtienen en los cálculos elástico y anelástico en barras de hormigón fisuradas. De manera que, en soportes centrales con carga elevada que no sufren fisuración, la rigidez de los dinteles y los momentos extremos que se obtienen es inferior a la obtenida en cálculo elástico mientras que en conexiones con soportes poco rígidos y/o parcialmente fisurados la rigidez de los dinteles cambia sensiblemente.

En cuanto a los dinteles en estado fisurado tanto en zonas de momentos positivos como negativos, se observa que sus valores de empotramiento elástico son similares a los del cálculo elástico, con escasa redistribución plástica.

En todo caso las deformaciones obtenidas en cálculo anelástico se aproximan mucho más a las reales que las deformaciones elásticas.

6. CONCLUSIÓN

Mediante este planteamiento de la Matriz de Rigidez de la barra de sección variable, se puede calcular por el Método de la Matriz de Rigidez cualquier estructura compuesta de barras rectas con sección variable.

Las ecuaciones matriciales que resultan son de igual tamaño que las empleadas para barras de sección constante, si bien, los coeficientes de la matriz son diferentes y hay que obtenerlos por integración a lo largo de la barra.

Lo mismo sucede con las acciones equivalentes de extremo de barra, que también hay que calcularlos por integración.

Debido a que la obtención de los Coeficientes de la Matriz de Rigidez por integración a lo largo de la barra puede ser laborioso cuando la variación de sus constantes mecánicas o la distribución de momentos se complica, resulta ventajosa la integración numérica.

A tal efecto, la regla de Simpson, obtiene una precisión suficiente, con no demasiados intervalos.

En **materiales isotrópicos**, la aplicación directa del método para barras de sección variable se puede realizar directamente a partir de su geometría sin necesidad de hacer hipótesis del comportamiento del material como cuando este no es isotrópico.

Esto sucede en el ejemplo del apartado 4 y también es el caso de perfiles de acero que tienen refuerzos en alguna zona. Por ejemplo, cartelas o refuerzos en barras que aumentan su rigidez en las zonas reforzadas, como puede suceder en los pilares metálicos cuando se utiliza cierto tipo de uniones semirígidas que los regresa y que tiene bastante influencia en el cálculo sísmico.

En el caso de **materiales no isotrópicos**, como el caso del hormigón armado o las vigas mixtas, es necesario establecer hipótesis que definan las leyes de variación de las constantes mecánicas de las barras como se ha hecho, a título de ejemplo, en el apartado 5 estimando el efecto de la fisuración en la rigidez de las barras de hormigón armado.

Existen numerosos sistemas estructurales donde la rigidez variable de las barras puede ser significativa, por lo que aplicar el método puede resultar útil y ser objeto de nuevos estudios.

Notaciones.

Mayúsculas:

A	Área
Ab	Acciones equivalentes de extremo de barra
D	Desplazamiento longitudinal
Db	Movimientos de extremo de barra
E	Módulo de deformación
F	Acción
G', G''	Términos de carga.
I	Momento de inercia
It	Módulo de torsión
K	Coeficiente
L	Longitud
M	Momento flector
N	Fuerza normal
Rb	Matriz de Rigidez
T	Momento torsor
U	Capacidad mecánica
V	esfuerzo cortante W Módulo resistente

Minúsculas:

a	Distancia. Flecha
b	Anchura
d	Canto útil
e	Excentricidad f Resistencia
g	Carga permanente repartida
h	Canto total
i	Radio de giro
k	Coeficiente
l	Longitud, luz
m	Momento flector por unidad de longitud
w	Flecha

Minúsculas griegas:

α	(Alfa)	Angulo, coeficiente
β	(Beta)	Angulo, coeficiente
γ	(Gamma)	Coeficiente de ponderación
ε	(Epsilon)	Deformación relativa
η	(Eta)	Coeficiente rigidez
θ	(Theta)	Angulo
λ	(Lambda)	Formal de la barra
μ	(Mu)	Formal de la barra
ν	(Nu)	Esfuerzo normal relativo
ξ	(Xi)	Coeficiente de variación
ρ	(Rho)	Cuantía geométrica
ρ', ρ''		Coeficientes rigidez
σ	(Sigma)	Tensión. Tensión tangencial
φ	(Phi)	Coeficiente
ψ	(Psi)	Coeficiente
ω	(Omega)	Cuantía mecánica

Referencias

- [1] Lahuerta, J. A. Formulario para el Proyecto de Estructuras Dossat Madrid, 1.955
- [2] Lahuerta, J. A. Apuntes de Estructuras I, ETSAUN
- [3] Lahuerta, J. A. Estructuras de edificación, ETSAUN 1.985
- [4] EHE-08. Ministerio de Fomento
- [5] Xu, Leiping & Hou, Pengfei & Han, Bing. (2016). Stiffness Matrix of Timoshenko Beam Element with Arbitrary Variable Section. 2991/mmebc-16.2016.405
- [6] Mancuso, Caitlin & Bartlett, F.. (2017). ACI 318-14 Criteria for Computing Instantaneous Deflections. ACI Structural Journal. 114. 10.14359/5168972654 55 56